Exercice 1: Déterminer les domaines de définition des fonctions réelles suivantes :
$f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^3-1}}$, $g(x) = \ln(1-2\cos x)$, $h(x) = \ln\left(\dfrac{2-|x|}{|x|-1}\right)$

Exercice 2: Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ soit croissante et $f \circ f \circ f$ décroissante. Montrer alors que f est décroissante. Que peut-on dire dans le cas $f \circ f$ et $f \circ f \circ f$ toutes deux décroissantes ?
(Indication : se rappeler que la monotonie d'une fonction g est liée au signe du rapport $\dfrac{g(x)-g(x')}{x-x'}$)

Exercice 3: En utilisant la définition de la limite, montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} = 1/2 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = 3/2$$

(Indication: pour la deuxième on pourra utiliser le changement $x = t^3$)

Exercice 4: Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 2x}{1-\sqrt{\cos x}} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Exercice 5: On définit une fonction réelle f par: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } \ x \leq 1/2 \\ \sqrt{x^2+\lambda x} & \text{si } \ x > 1/2 \end{cases}$

Déterminer les valeurs du paramètre λ pour que f soit définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Étudier dans ce cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$ en discutant suivant les valeurs de λ.

Exercice 6: Montrer que la fonction définie par $g(x) = \sin x \sin(1/x)$ est prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$. Ce résultat reste-t-il vrai si on remplaçait le sinus par le cosinus ?

Exercice 7: Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application telle que $\forall x, x' \in [a,b]$ $|f(x)-f(x')| \leq |x-x'|$. Montrer que f est continue, puis qu'il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Application : $f(x) = \cos x$ dans $[0, \pi/2]$.

Exercice 8: Soit $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une application continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Montrer que g admet un maximum. Montrer ensuite à travers un contre-exemple que le résultat n'est plus vrai si on ne fait pas l'hypothèse de continuité.