Exercice 1: On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. En posant $x_n = u_n - a$, déterminer la constante a pour que $(x_n)_{n\geq 0}$ soit une suite géométrique. Calculer alors u_n en fonctions de n.
2. Généraliser enfin au cas où $w_{n+1} = \alpha w_n + \beta$.

Exercice 2: En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = 0.$$

Exercice 3: Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 4: Soit a un réel fixé. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 0}$ par $\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1/4 \end{cases}$
Montrer que cette suite est croissante. En supposant qu'elle est majorée, déterminer sa limite (possible). Discuter enfin suivant les valeurs de a l'existence de la limite.

Exercice 5: On donne la suite : $\begin{cases} y_0 = \dfrac{11}{4} \\ y_{n+1} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{y_n - \dfrac{7}{4}} \end{cases}$ Montrer que cette suite est bien définie. En supposant qu'elle converge, déterminer sa limite possible L. Montrer qu'elle est majorée par L. Étudier enfin sa monotonie, puis conclure.

Exercice 6: On définit, pour $n \geq 1$, les deux suites :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1} \qquad , \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes (on ne cherchera pas à déterminer leur limite commune). En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 7: Montrer par récurrence sur p que
$\forall n, p \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2} < \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p+1}$. En déduire que la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est de Cauchy.

Exercice 8: Est-il vrai qu'une suite réelle croissante ayant une sous-suite convergente, est, elle même, convergente ? Si oui, l'hypothèse "croissante" est-elle vraiment nécessaire?