Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen	A.U 2018/2019 - M.I 1ère année
Faculté des Sciences - Département de Mathématiques	Analyse 1 - Fiche de T.D n°1

Exercice 1: On donne les nombres entiers $A = 132$ et $B = 67$ en base 10.

1. Écrire ces deux nombres en base 2, puis en base 5.
2. Effectuer la somme $A + B$ en base 2, puis en base 5. Vérifier les résultats en exprimant $A + B$ en base 10.
3. (Facultatif) Refaire le même travail en remplaçant l'addition par la multiplication.

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ les équations suivantes :

$$\overline{1x3}^{x} = \overline{23}^{5} \quad , \quad \overline{x2}^{2x} = \overline{x6}^{7}$$

Exercice 3: Résoudre dans $\mathbb{Z}$, respectivement dans $\mathbb{Z}^2$, les équations :

$$x^3 - 5x^2 + 8 = 0 \quad , \quad 2x - 3y = 5$$

Indication : utiliser la divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4: Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (justifier) :

1. La somme (resp. le produit) d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
2. La somme (resp. le produit) de deux irrationnels est irrationnelle.

Exercice 5: Établir les résultats suivants ($[x]$ désigne la partie entière de x):

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} \qquad [x] + [y] \leq [x+y] \leq [x] + [y] + 1.$
2. $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice 6: Déterminer, si elles existent, les bornes inférieure et supérieure des ensembles suivants (discuter suivant les valeurs des paramètres) :

$$A = \left\{(-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} / k, n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B_{\alpha,\beta} = \left\{x^2 - x + 1 / x \in [\alpha, \beta]\right\}$$

Exercice 7: Soient A, B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall a \in A \qquad \forall b \in B, \quad a \leq b.$$

Montrer que $\sup A$ et $\inf B$ existent et que $\sup A \leq \inf B$. Montrer aussi que $\sup A = \inf B$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad , \exists b \in B$ tels que $b - a \leq \varepsilon$.

Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|2x^2 - 1| \leq |x + 1|$$

T.D n°1

Exercice 1

1)

$$\begin{array}{c|c} 132 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 66 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 66 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 33 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 33 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 16 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 16 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$$

Donc $132 = \overline{10000100}^{2}$

$$\begin{array}{c|c} 132 & 5 \\ \hline 32 & \\ \boxed{2} & 26 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 26 & 5 \\ \hline \boxed{1} & 5 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 5 & 5 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 5 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$$

Donc $132 = \overline{1012}^{5}$

$$\begin{array}{c|c} 67 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 33 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 33 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 16 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 16 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 8 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 8 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 4 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ \hline \boxed{0} & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline \boxed{1} & 0 \end{array}$$

Donc,

$67 = \overline{1000011}^{2}$

$$\begin{array}{c|c} 67 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 13 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 0 \end{array}$$

Donc

$67 = \overline{232}^{5}$

2) <u>En base 2:</u>

$$A+B = \begin{array}{r} \overline{10000100}^{\,2} \\ + \quad \overline{1000011}^{\,2} \\ \hline \overline{11000111}^{\,2} \end{array}$$

ou en base 10: $A+B = 132+67 = 199$

Vérifions : $\overline{11000111}^{\,2} = 1+2+2^2+0.2^3+0.2^4+0.2^5+1.2^6+1.2^7$

$= 1+2+4+64+128$

$= 199$

<u>En base 5:</u>

$$A+B = \begin{array}{r} \overline{1012}^{\,5} \\ + \quad \overline{232}^{\,5} \\ \hline \overline{1244}^{\,5} \end{array}$$

Vérifions: $\overline{1244}^{\,5} = 4+4\times5+2\times5^2+1\times5^3$

$= 4+20+50+125 = 199.$

3) <u>En base 2:</u>

$$A\times B = \begin{array}{r} \overline{10000100}^{\,2} \\ \times \quad \overline{1000011}^{\,2} \\ \hline \overline{10000100}^{\,2} \\ \overline{10000100}^{\,2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \overline{10000100}^{\,2} \\ \hline \overline{10001010001100}^{\,2} \end{array}$$

<u>En base 10:</u> $A\times B =$

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times \quad 67 \\ \hline 924 \\ 792 \\ \hline 8844 \end{array}$$

<u>Vérifions</u> $\overline{10001010001100}^{\,2} = 0+0.2+1.2^2+1.2^3+\dots+1.2^7+0.2^8+1.2^9+\dots+1.2^{13}$

$= 4+8+128+512+8192$

$= 652+8192 = 8844.$

<u>En base 5 :</u> $A \times B = \overline{1012}^5$

$$
\begin{array}{r}
\overline{232}^5 \\
\times \quad \overline{2024}^5 \\
\hline
\overline{3041}^5 \\
\overline{2024}^5 \\
\hline
\overline{240334}^5
\end{array}
$$

<u>Vérifions</u> $\overline{240334}^5 = 4 + 3\times5 + 3\times5^2 + 0.5^3 + 4\times5^4 + 2\times5^5$

$= 4 + 15 + 75 + 4\times625 + 2\times3125$

$= \underbrace{4 + 15 + 75} + 2500 + 6250$

$= 94 + 2500 + 6250$

$= 94 + 8750$

$= 8844$

<u>Exercice 2</u> Résolvons dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$.

a) $\overline{1x3}^{x} = \overline{23}^5$

Equation incohérente, donc pas de solution.
Le nombre est écrit en base x, et x figure dans son écriture. impossible.
Seuls les nombres inférieurs à x doivent figurer dans l'écriture.

b) $\overline{x2}^{2x} = \overline{x6}^7$ $x < 2x$ trivial et $x < 7$.

Donc

$2 + x \times 2x = 6 + x \times 7$

Par suite $2 + 2x^2 = 6 + 7x \iff 2x^2 - 7x - 4 = 0$

$\Delta = 49 + 32 = 81 = 9^2$

$x_1 = \dfrac{7-9}{4} = -\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$

$x_2 = \dfrac{7+9}{4} = 4 \in \mathbb{N}$ et $4 < 7$.

Donc $x = 4$ est solution de l'équation donnée

ou tout simplement puisque résolution dans $\mathbb{N}$:
$2x^2 - 7x - 4 = 0 \iff 2x^2 - 7x = 4$
$\iff x(2x - 7) = 4$
$\Rightarrow x$ divise $4 \Rightarrow x \in \{1, 2, 4\}$
$x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = -9 \neq 0$
Donc $x = 1$ ne convient pas
$x = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = -10 \neq 0$
Donc $x = 2$ ne convient pas.
$x = 4 \Rightarrow 2x^2 - 7x - 4 = 0$
Donc $x = 4$ est la solution de l'éq. donnée

Exercice 3 : Résolvons dans $\mathbb{Z}^2$:

a) $x^3 - 5x^2 + 8 = 0$.

$\iff x^3 - 5x^2 = -8$

$\iff x^2(x-5) = -8$.

Donc
x^2 divise -8 et $x^2 > 0$

Par suite : $x^2 = 1$ ou $x^2 = 2$ ou $x^2 = 4$ ou $x^2 = 8$

c-à-d : $\begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = \sqrt{8} \notin \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{8} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

x	-1	1	2	-2
x^3-5x^2+8	$2 \neq 0$	$4 \neq 0$	$-4 \neq 0$	$-10 \neq 0$.

L'équation $x^3 - 5x^2 + 8 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

b) $2x - 3y = 5$

$2x = 3y + 5$
$= 3y + 3 + 2$
$= 3(y+1) + 2$

Donc le reste de la division de $2x$ par 3 est 2.

D'où $2x = 3p + 2$ c-à-d. $3p = 2x - 2 = 2(x-1)$

3 ne divise pas 2 donc 3 divise $x-1$ c-à-d. $x - 1 = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$

soit : $x = 3k+1$

Or $2x = 3y + 5$. Donc $6k + 2 = 3y + 5 = 3(y+1) + 2$

Finalement, $6k = 3(y+1)$ c-à-d. $y + 1 = 2k$ d'où $y = 2k - 1$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2,\ 2x - 3y = 5\} = \{(3k+1, 2k-1),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 4.

1) La somme (ou le produit) d'un nombre rationnel r_1 et d'un nombre irrationnel i_1 est-elle (est-il) un nombre irrationnel ?

Faisons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que i_1+r_1 soit un nombre rationnel r_2 et que $i_1.r_1$ soit aussi un nombre rationnel r_3.

$$i_1+r_1=r_2 \iff \underbrace{i_1}_{\notin\mathbb{Q}} = \underbrace{\underbrace{r_2}_{\in\mathbb{Q}} - \underbrace{r_1}_{\mathbb{Q}}}_{\in\mathbb{Q}}$$

Absurde. Donc i_1+r_1 est irrationnel

$$i_1.r_1=r_3$$

Si $r_1=0$, $i_1r_1=0\in\mathbb{Q}$

Si $r_1\neq 0$, $\underbrace{i_1}_{\notin\mathbb{Q}} = \left(\dfrac{r_3\in\mathbb{Q}}{r_1\in\mathbb{Q}}\right)\in\mathbb{Q}$

Absurde

Donc i_1r_1 est irrationnel.

2) La somme (ou le produit) de 2 nombres irrationnels i_1 et i_2 est-elle (est-il) un nombre irrationnel ?

Considérons les cas suivants :

$$\left.\begin{array}{l} i_1=3-\sqrt{2} \quad \notin\mathbb{Q} \\ i_2=3+\sqrt{2} \quad \notin\mathbb{Q} \end{array}\right\} \text{d'après la 1ère question.}$$

$i_3=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$i_1+i_2=6\in\mathbb{Q}$ et $i_1.i_2=9-2=7\in\mathbb{Q}$

$i_2+i_3=\underbrace{\underbrace{3}_{\in\mathbb{Q}}+\underbrace{2\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}}}_{\notin\mathbb{Q}}$ et $i_2.i_3=\underbrace{\underbrace{3\sqrt{2}}_{\notin\mathbb{Q}}+\underbrace{2}_{\in\mathbb{Q}}}_{\notin\mathbb{Q}}$

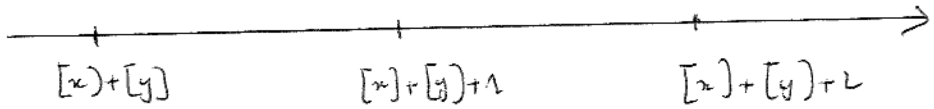
Donc on ne peut rien conclure ni pour la somme ni pour le produit de 2 nombres irrationnels.

Exercice 5. 1) Montrons que $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}$,

$$[x] \leq x < [x]+1$$
$$[y] \leq y < [y]+1$$

$$\underbrace{[x]+[y]}_{\in \mathbb{Z}} \leq x+y < \underbrace{[x]+[y]+2}_{\in \mathbb{Z}.} \quad (*)$$



$$(*) \Longrightarrow \begin{cases} [x]+[y] \leq x+y < [x]+[y]+1 \\ \text{ou} \\ [x]+[y]+1 \leq x+y < [x]+[y]+2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [x+y] = [x]+[y] \\ \text{ou} \\ [x+y] = [x]+[y]+1 \end{cases}$$

Par suite $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$

2) Montrons que : $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$

i) $\forall x \in \mathbb{Z}$, $[x] = x$ et $[\underbrace{-x}_{\in \mathbb{Z}}] = -x$. Donc $\forall x \in \mathbb{Z}$, $[x]+[-x] = x-x = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $[x] < x < [x]+1$ et $-[x]-1 < -x < -[x]$ donc $[-x] = -[x]-1$

2 nbres entiers consécutifs.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}-\mathbb{Z}$, $[x]+[-x] = [x]-[x]-1 = -1$ cqfd.

Exercice 6. Déterminons, si elles existent, inf A, inf B, Sup A et Sup B, dans les cas suivants :

$$A = \left\{ (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} \,/\, k,n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B_{\alpha,\beta} = \left\{ x^2 - x + 1 \,/\, x \in [\alpha,\beta] \right\}$$

$$(-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1} = \begin{cases} -1 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est impair et } n \text{ est impair} \\ -1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est impair et } n \text{ est pair} \\ 1 - \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est pair et } n \text{ est impair} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } k \text{ est pair et } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Il est clair que $A \neq \emptyset$

Donc

$$A = \underbrace{\left\{-1 - \frac{1}{2k+2}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_1} \cup \underbrace{\left\{-1 + \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_2} \cup \underbrace{\left\{1 - \frac{1}{2k+2}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_3} \cup \underbrace{\left\{1 + \frac{1}{2k+1}, k \in \mathbb{N}\right\}}_{A_4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant 2k+2 \\ \quad 0 < \frac{1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2k+2} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ -\frac{3}{2} \leqslant -1 - \frac{1}{2k+2} < -1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{2k+2} < 0$$

Donc A_1 est minoré par $-\frac{3}{2}$, majoré par -1

et A_3 " " " $\frac{1}{2}$, majoré par 0

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant 2k+1 \\ \quad 0 < \frac{1}{2k+1} \leqslant 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ -1 < -1 + \frac{1}{2k+1} \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 1 < 1 + \frac{1}{2k+1} \leqslant 2$$

Donc A_2 est minoré par -1, majoré par 0

et A_4 " " " 1, majoré par 2.

Finalement, A est minoré par $-\frac{3}{2}$, majoré par 2, donc $\inf A$ et $\sup A$ existent

De plus : $-\frac{3}{2} = (-1)^1 + \frac{(-1)^1}{1+1} = (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $k=1$ et $n=1$

Donc $-\frac{3}{2} \in A$.

$2 = (-1)^k + \frac{(-1)^n}{n+1}$ pour $k=0$ et $n=0$ donc $2 \in A$

$(-\frac{3}{2} \in A \Rightarrow A \neq \emptyset)$

$-\frac{3}{2}$ minore A et $-\frac{3}{2} \in A$. Donc $\inf A = -\frac{3}{2}$

2 majore A et $2 \in A$. Donc $\sup A = 2$.

Soit $B_{\alpha,\beta} = \{x^2 - x + 1 \ , \ x \in [\alpha, \beta]\}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$x \in [\alpha, \beta] \iff \alpha \leqslant x \leqslant \beta \iff \alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2}$

__1er cas__ Si $\beta - \frac{1}{2} \leqslant 0$ c.à.d. $\beta \leqslant \frac{1}{2}$.

Comme $\alpha < \beta$, on a $\alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2} \leqslant 0$

D'où $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2$ ($\geqslant 0$ trivial)

Par suite $\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

soit $\underbrace{\beta^2 - \beta + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}} \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant \underbrace{\alpha^2 - \alpha + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}}$ pour tout $x \in [\alpha, \beta]$

Finalement si $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ alors $B_{\alpha\beta}$ est borné donc $\inf B_{\alpha,\beta}$ et $\sup B_{\alpha,\beta}$ existent.

$\beta^2 - \beta + 1$ minore $B_{\alpha,\beta}$ et $\beta^2 - \beta + 1 \in B_{\alpha,\beta}$
et
$\alpha^2 - \alpha + 1$ majore $B_{\alpha,\beta}$ et $\alpha^2 - \alpha + 1 \in B_{\alpha,\beta}$
$\Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta} = \beta^2 - \beta + 1$ et $\sup B_{\alpha,\beta} = \alpha^2 - \alpha + 1$

__2ème cas:__ Si $\alpha - \frac{1}{2} \geqslant 0$ c.à.d $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$

Comme $\alpha < \beta$, on a $0 \leqslant \alpha - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2} \leqslant \beta - \frac{1}{2}$

D'où $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leqslant \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

c.à.d: $\forall x \in [\alpha, \beta]$, $\underbrace{\alpha^2 - \alpha + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}} \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant \underbrace{\beta^2 - \beta + 1}_{\in B_{\alpha,\beta}}$

Finalement si $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, alors $B_{\alpha,\beta}$ est borné donc $\inf B_{\alpha,\beta}$ et $\sup B_{\alpha,\beta}$ existent

$\alpha^2 - \alpha + 1$ minore $B_{\alpha,\beta}$ et $\alpha^2 - \alpha + 1 \in B_{\alpha,\beta}$
et
$\beta^2 - \beta + 1$ majore $B_{\alpha,\beta}$ et $\beta^2 - \beta + 1 \in B_{\alpha,\beta}$
$\Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta} = \alpha^2 - \alpha + 1$ et $\sup B_{\alpha,\beta} = \beta^2 - \beta + 1$

3^{eme} cas : Si $\alpha-\frac{1}{2}<0$ et $\beta-\frac{1}{2}>0$ c-à-d $\alpha<\frac{1}{2}<\beta$ ou encore $\frac{1}{2}\in\left]\alpha,\beta\right[$

$x=\frac{1}{2}\in\left]\alpha,\beta\right[$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$ donc $\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$ d'où $B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset$

On a déjà noté que $\forall x\in[\alpha,\beta] \iff \alpha-\frac{1}{2}\leq x-\frac{1}{2}\leq\beta-\frac{1}{2}$

De plus $\forall x\in[\alpha,\beta]$, $x^2-x+1=\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

Donc $\frac{3}{4}$ minore $B_{\alpha,\beta}$.

Par suite $\left.\begin{array}{l} B_{\alpha,\beta} \text{ minoré} \\ B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \inf B_{\alpha,\beta}$ existe

Par ailleurs, il est clair que pour $x=\frac{1}{2}$, $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

Donc $\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$

Finalement $\inf B_{\alpha,\beta}=\frac{3}{4}$.

Il reste à déterminer $\sup B_{\alpha,\beta}$

$\forall x\in[\alpha,\beta]$, $\underbrace{\alpha-\frac{1}{2}}_{<0}\leq x-\frac{1}{2}\leq\underbrace{\beta-\frac{1}{2}}_{>0} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leq\max\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2,\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$$\Rightarrow x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\leq\max\left(\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2,\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2\right)+\frac{3}{4}=\begin{cases}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\geq\left|\alpha-\frac{1}{2}\right| \\ \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\leq\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|\end{cases}$$

Or $\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$ et $\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\in B_{\alpha,\beta}$.

Donc $\begin{cases} B_{\alpha,\beta}\neq\emptyset \\ B_{\alpha,\beta} \text{ majoré par } \underbrace{\beta^2-\beta+1 \text{ ou } \alpha^2-\alpha+1} \end{cases}$ soit $\sup B_{\alpha,\beta}$ existe

c-à-d $\begin{cases} B_{\alpha,\beta} \text{ majoré par } \max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right) \\ \max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right)\in B_{\alpha,\beta}\end{cases} \Rightarrow \sup B_{\alpha,\beta}=\max\left(\beta^2-\beta+1,\ \alpha^2-\alpha+1\right)$

$$=\begin{cases}\beta^2-\beta+1 & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\geq-\alpha+\frac{1}{2} \\ \alpha^2-\alpha+1 & \text{si } \beta-\frac{1}{2}\leq-\alpha+\frac{1}{2}\end{cases}$$

<u>Exercice 7</u> $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$.

$\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.

a) Montrons que Sup A et inf A existent.

Soit $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall a \in A, \ a \leq b_0 \\ \quad \text{et} \\ \forall b \in B, \ b \geq a_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A \text{ majoré par } b_0 \\ \quad \text{et} \\ B \text{ minoré par } a_0 \end{array}\right.$$

A est donc non vide et majoré. Par suite Sup A existe

B " " " " minoré. " inf A existe

b) Montrons que $\operatorname{Sup} A \leq \inf B$.

Soit b quelconque dans B.

$\forall a \in A, a \leq b$ c-à-d. b majore A.

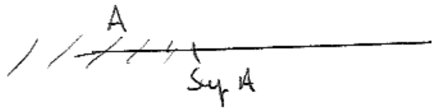
Or Sup A est le plus petit majorant de A. Donc $\forall b \in B$, $\operatorname{Sup} A \leq b$.

D'où Sup A minore B.

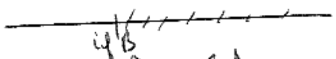
$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Sup} A \text{ minore } B \\ \inf A \text{ plus grand minorant de } B \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Sup} A \leq \inf B$$

c) Montrons que $\operatorname{Sup} A = \inf B \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < \varepsilon$.

"$\Rightarrow$" $\operatorname{Sup} A = \inf B$



$\forall a \in A, a \leq \operatorname{Sup} A$



$\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, a_0 \geq \operatorname{Sup} A - \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, -a_0 < -\operatorname{Sup} A + \varepsilon$ (α)

$\forall b \in B, b \geq \inf B$

$\forall \varepsilon > 0, \exists b_0 \in B, b_0 \leq \inf B + \varepsilon$ (β)

(α) et (β) $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 \leq \inf B - \operatorname{Sup} A + 2\varepsilon$

$\inf B = \operatorname{Sup} A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 \leq 2\varepsilon$

$\varepsilon > 0 \iff 2\varepsilon > 0$.

En posant $2\varepsilon = \overline{\varepsilon}$, on obtient $\forall \overline{\varepsilon} > 0, \exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B, b_0 - a_0 < \overline{\varepsilon}$

c-à-d. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a < \varepsilon$

" $\Leftarrow$ " Il reste à montrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \exists b \in B, b - a \leq \varepsilon \implies \sup A = \inf B$.

c-à-d $\sup A \neq \inf B \implies \exists \varepsilon_0 > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \varepsilon_0$

Supposons $\sup A \neq \inf B$.

On a déjà montré que $\sup A \leq \inf B$.

Donc $\sup A \neq \inf B \implies \sup A < \inf B \iff \inf B - \sup A > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \forall a \in A, a \leq \sup A \text{ c-à-d. } -a \geq -\sup A \\ \forall b \in B, b \geq \inf B \end{array}\right\} \implies \forall a \in A, \forall b \in B, b - a \geq \inf B - \sup A > 0$$

Or, $\inf B - \sup A > \dfrac{\inf B - \sup A}{2}$ $\left(\dfrac{\inf B - \sup A}{2018} \text{ !!!} \right)$

$\implies \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \dfrac{\inf B - \sup A}{2} > 0$

Donc $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall a \in A, \forall b \in B, b - a > \varepsilon_0$

$\varepsilon_0 = \dfrac{\inf B - \sup A}{2}$

Exercice 8 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x^2 - 1| \leq |x+1|$ c-à-d $|2x^2-1| - |x+1| \leq 0$

$2x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = +\frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

x		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
Signe de $2x^2-1$	+	0	−	0	+

$x + 1 = 0 \iff x = -1$

x		-1	
Signe de $x+1$	−	0	+

Exercice 8 : Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|2x^2-1| \leq |x+1|$

Simplifions d'abord l'écriture des expressions $|2x^2-1|$ et $|x+1|$

$2x^2-1=0 \iff x^2=\frac{1}{2} \iff x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$2x^2-1$	+		0	−	0	+	

$x+1=0 \iff x=-1$

x		-1	
$x+1$	−	0	+

x	$-\infty$; -1	-1 ; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$; $+\infty$
$x+1$	−	+	+	+
$\|x+1\|$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$
$2x^2-1$	+	+	−	+
$\|2x^2-1\|$	$2x^2-1$	$2x^2-1$	$-2x^2+1$	$2x^2-1$
$\|2x^2-1\| \leq \|x+1\|$	$2x^2+x\leq 0$	$2x^2-x-2\leq 0$	$2x^2+x \geq 0$	$2x^2-x-2\leq 0$

a) $2x^2+x=0 \iff x(2x+1)=0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

x		$-\frac{1}{2}$		0	
$2x^2+x$ sur $\mathbb{R}$	+	0	−	0	+

$2x^2+x$ sur $]-\infty,-1] \cup [-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	+	$-\frac{1}{2}$	−	0	+	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^2+x$	+				+	0	−	0	+		

$S_1=\{x\in]-\infty,-1]\ ,\ 2x^2+x\leq 0\}=\emptyset$

$S_2=\{x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]\ ,\ 2x^2+x\geq 0\}=[-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}]\cup[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$

b) $2x^2-x-2=0$; $\Delta=1+16=17$; $x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

x		x_1		x_2	
$2x^2-x-2$ sur $\mathbb{R}$	+	0	−	0	+

$2x^2-x-2$ sur $[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[$

x	-1		$\frac{1-\sqrt{17}}{4}$	−	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	−	$\frac{1+\sqrt{17}}{4}$	+
$2x^2-x-2$		+	0	−				−	0	+

$S_3\{x\in[-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty[\ ,\ 2x^2-x-2\leq 0\}=[\frac{1-\sqrt{17}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}]\cup[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4}]$

Conclusion : $\{x\in\mathbb{R}\ ,\ |2x^2-1|\leq|x+1|\}=S_1\cup S_2\cup S_3$

$=[\frac{1-\sqrt{17}}{4},-\frac{1}{2}]\cup[0,\frac{1+\sqrt{17}}{4}]$