Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 1

Fiche de TD 5 : Les polynômes

Exercice 1 :

1. Trouver les diviseurs de $X^4 + 2X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $X - 1 | X^n - 1$(pour $n \geqslant 1$).

Exercice 2 :

Déterminer le $PGCD$ de $A = X^5 + X^3 + X^2 + 1$ et $B = 2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$. Trouver les coefficients de Bézout U, V.

(Supp) Mêmes questions avec $A = X^5 - 1$ et $B = X^4 + X + 1$.

Exercice 3 :

Factoriser $P(X) = (2X^2 + X - 2)^2(X^4 - 1)^3$ et $Q(X) = 3(X^2 - 1)^2(X^2 - X + \frac{1}{4})$ dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire leur $PGCD$ et leur $PPCM$.

Exercice 4 :

1. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}[X]$:

$$\frac{1}{X^2 - 1} ; \frac{X^2 + 1}{(X - 1)^2} ; \frac{X}{X^3 - 1}.$$

2. **(Supp)** Décomposer les fractions suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$:

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X - 1)(X + 2)^2} ; \frac{2X^2 - X}{(X^2 + 2)^2} ; \frac{X^6}{(X^2 + 1)^2}.$$

Exercice 5 : (Supp)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.
2. En déduire que le polynôme $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec a, b, c et d des entiers naturels est divisible par $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

Exercice 6 : (Supp)

Soit n un entier strictement positif.

1. Déterminer le $PGCD$ des polynômes $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$.
2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1.$$