Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 4 : Structures Algèbriques

Exercice 1 :
Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.
I. Montrer que :

1. $\forall a \in G : a \star x = a \Leftrightarrow x = e.$
2. $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e.$

II. Trouver tout les éléments x de G qui satisfait la relation $x \star x = x$.

Correction Exercice 1
I. Soit $(G, \star)$ un groupe qui admet e comme élément neutre.
a. " $\Rightarrow$ " : Soit $a \in G : a \star x = a$. Puisque G est un groupe alors pour tout a dans G il existe son symétrique a' tel que $a' \star a = e$. Alors

$$a \star x = a \Rightarrow a' \star a \star x = a' \star a.$$

$$\Rightarrow x = e.$$

" $\Leftarrow$ " : Soit $x = e$. Alors

$$\forall a \in G : a \star x = a \star e = a.$$

b. De même pour $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e$, il suffit de reprendre la même démonstration.
II. Le seul x qui satisfait la relation $x \star x = x$ est $x = e$.

Exercice 2 :
On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, la loi $\bigstar$ comme suit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar b = a + b + 2ab.$$

Montrer que $\left(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar\right)$ est un groupe abélien.

Correction Exercice 2
Montrer que $\left(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar\right)$ est un groupe abélien.
1. $\bigstar$ est associative :
Prenons $a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$:

$$a \bigstar (b \bigstar c) = a \bigstar (b + c + 2bc) = a + b + c + 2bc + 2a(b + c + 2bc).$$

$$(a \bigstar b) \bigstar c = (a + b + 2ab) \bigstar c = a + b + 2ab + c + 2c(a + b + 2ab).$$

Donc $\forall a, b, c \in \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\} : a \bigstar (b \bigstar c) = (a \bigstar b) \bigstar c \Rightarrow \bigstar$ est associative.

2. L'élément neutre pour $\bigstar$:

Il suffit de résoudre $a \bigstar x = a \Rightarrow a + x + 2ax = a \Rightarrow x(1+2a) = 0 \Rightarrow x = 0$, car $a \neq -\frac{1}{2}$.

Donc $e = 0$ est l'élément neutre.

3. Tout élément a de $\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ admet un symétrique a' :

a' satisfait $a \bigstar a' = e \Rightarrow a + a' + 2aa' = 0 \Rightarrow a'(1+2a) = -a \Rightarrow a' = \frac{-a}{1+2a}$.

En plus , $\bigstar$ est commutative car :

$$a \bigstar b = a + b + 2ab = b + a + 2ba = b \bigstar a.$$

Conclusion : $(\mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{2}\}, \bigstar)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 :

Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle le centre de G l'ensemble

$$C = \{c \in G / x.c = c.x, \forall x \in G\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de G.

Correction Exercice 3

1. $e \in G$ vérifie $\forall x \in G : x.e = e.x \Rightarrow e \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$.

2. Soient $c_1, c_2 \in C$. Montrons que $c_1.c_2 \in C$ i.e $(c_1.c_2).x = x.(c_1.c_2), \forall x \in G$.

$$\begin{aligned}(c_1.c_2).x &= c_1.(c_2.x)\\ &= c_1.(x.c_2)\\ &= (c_1.x).c_2\\ &= (x.c_1).c_2\\ &= x.(c_1.c_2)\end{aligned}$$

Donc x commute avec $c_1.c_2 \Rightarrow c_1.c_2 \in C$.

3. Soit $c \in C$. Montrons que $c^{-1} \in C$.

$$\begin{aligned}c.x = x.c &\Rightarrow c^{-1}.c.x = c^{-1}.x.c\\ &\Rightarrow x = c^{-1}.x.c\\ &\Rightarrow x.c^{-1} = c^{-1}.x\end{aligned}$$

Donc x commute avec $c^{-1} \Rightarrow c^{-1} \in C$.

Conclusion : C est un sous-groupe de G.

Exercice 4 :

Soit $f : G_1 \to G_2$ un morphisme de groupe surjectif.

Montrer que si $(G_1, .)$ est commutatif alors $(G_2, .)$ est commutatif.

Solution Exercice 4
Il suffit de montrer que :

$$\forall y_1, y_2 \in G_2 : y_1.y_2 = y_2.y_1.$$

Puisque f est surjective alors $\forall y_1, y_2 \in G_2, \exists x_1, x_2 \in G_1$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. $y_1.y_2 = f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2)$ car f est morphisme. Le fait que G_1 est commutatif alors $\forall x_1 x_2 \in G_1 : x_1.x_2 = x_2.x_1$. Donc on a :

$$y_1.y_2 = f(x_1).f(x_2) = f(x_1.x_2) = f(x_2.x_1) = f(x_2).f(x_1) = y_2.y_1.$$

Exercice 5 :
Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit les deux lois suivantes : $\forall \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{x+y} \\ \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{x \times y} \end{cases}$$

1. Tracer les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.

Correction Exercice 5
1. Les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}$:

$\dot{+}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\dot{\times}$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2. Montrons que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif :
a. $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+})$ est un groupe abélien car :
$\dot{+}$ est associative : $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$(\overline{x} \dot{+} \overline{y}) \dot{+} \overline{z} = (\overline{x+y}) \dot{+} \overline{z} = \overline{x+y+z} \text{ et } \overline{x} \dot{+} (\overline{y} \dot{+} \overline{z}) = \overline{x} \dot{+} (\overline{y+z}) = \overline{x+y+z}.$$

D'après le tableau de $\dot{+}$, on remarque que l'élément neutre est $e = 0$, et que pour chaque élément $\overline{x}$ de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, il existe un symétrique. Enfin, on peut vérifier facilement que $\dot{+}$ est commutative.
b. $\dot{\times}$ est associative car :
$\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$(\overline{x} \dot{\times} \overline{y}) \dot{\times} \overline{z} = (\overline{x \times y}) \dot{\times} \overline{z} = \overline{x \times y \times z} \text{ et } \overline{x} \dot{\times} (\overline{y} \dot{\times} \overline{z}) = \overline{x} \dot{\times} (\overline{y \times z}) = \overline{x \times y \times z}.$$

c. $\dot{\times}$ est distributive par rapport à $\dot{+}$ car :
$\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\overline{x} \dot{\times} (\overline{y} \dot{+} \overline{z}) = \overline{x} \dot{\times} (\overline{y+z}) = \overline{x \times (y+z)} = (\overline{x \times y}) \dot{+} (\overline{x \times z}) = (\overline{x} \dot{\times} \overline{y}) \dot{+} (\overline{x} \dot{\times} \overline{z}).$$

De la même manière on montre que : $(\overline{x} \dot{+} \overline{y}) \dot{\times} \overline{z} = (\overline{x} \dot{\times} \overline{z}) \dot{+} (\overline{y} \dot{\times} \overline{z}) \Rightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ un anneau.
En plus, la loi $\dot{\times}$ admet un élément unité 1 ce qui implique que l'anneau est unitaire.
Or, chaque élément non nul, admet un inverse (voir tableau de $\dot{\times}$), alors $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commuattif puisque $\dot{\times}$ est commutative.