

Exercice 1 :

Soit (G, \star) un groupe qui admet e comme élément neutre.

I. Montrer que :

1. $\forall a \in G : a \star x = a \Leftrightarrow x = e.$
2. $\forall a \in G : x \star a = a \Leftrightarrow x = e.$

II. Trouver tout les éléments x de G qui satisfait la relation $x \star x = x.$

Exercice 2 :

On définit dans l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$, la loi \star comme suit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} : a \star b = a + b + 2ab.$$

Montrer que $(\mathbb{Q} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}, \star)$ est un groupe abélien.

Exercice 3 :

Soit $(G, .)$ un groupe. On appelle le centre de G l'ensemble

$$C = \{c \in G / x.c = c.x, \forall x \in G\}.$$

Montrer que C est un sous-groupe de $G.$

Exercice 4 :

Soit $f : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de groupe surjectif.

Montrer que si $(G_1, .)$ est commutatif alors $(G_2, .)$ est commutatif.

Exercice 5 :

Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on définit les deux lois suivantes : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} :$

$$\begin{cases} \bar{x} \dot{+} \bar{y} = \overline{x \dot{+} y} \\ \bar{x} \dot{\times} \bar{y} = \overline{x \dot{\times} y} \end{cases}$$

1. Tracer les tableaux de $\dot{+}$ et $\dot{\times}.$
2. Montrer que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \dot{+}, \dot{\times})$ est un corps commutatif.