Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 1

Corrigé de la fiche de TD 3 : Relations binaires

Exercice 1 :

Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Solution Exercice 1

1. Pour montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence il faut qu'elle soit : réflexive, symétrique et transitive. La réflexivité est obtenue en remplçant y par x. En effet :
$x\mathcal{R}x \Rightarrow x^2 - x^2 = x - x \Rightarrow 0 = 0$, c'est une propriété qui est vraie donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Prenons $x, y \in \mathbb{R}$ et montrons que si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. C'est la symétrie. Chose qui est évident car si on multiplie la quantité $x^2 - y^2 = x - y$ par -1, on obtiendra $y^2 - x^2 = y - x$, ce qui implique que $y\mathcal{R}x$.
Maintenant, on prend $x, y, z \in \mathbb{R}$. Montrons que si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$. On aura deux équations $x^2 - y^2 = x - y$ et $y^2 - z^2 = y - z$. En faisant l'addition on obtient que $x^2 - z^2 = x - z \Rightarrow x\mathcal{R}z$. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. $cl(x) = \{y \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}y\}$. Soit $y \in cl(x)$ alors on a :

$$x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow (x - y)(x + y) - (x - y) = 0.$$

$$(x - y)[x + y - 1] = 0 \Rightarrow y = x \vee y = 1 - x.$$

$$\Rightarrow cl(x) = \{x, 1 - x\}.$$

3. L'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}} cl(x) = \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soit E un ensemble et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une partition de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

Solution Exercice 2

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence :

a. $\mathcal{R}$ est une relation réflexive : En effet,

$$x\mathcal{R}x \Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } x \in X_i).$$

b. $\mathcal{R}$ est une relation symétrique car :

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (y \in X_i \text{ et } x \in X_i).$$

$$\Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

c. $\mathcal{R}$ est une relation transitive : Soit $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$:

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \Rightarrow \exists i_1 \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_{i_1} \text{ et } y \in X_{i_1}) \\ y\mathcal{R}z \Rightarrow \exists i_2 \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (y \in X_{i_2} \text{ et } z \in X_{i_2}) \end{cases}$$

On remarque que le y est à la fois dans X_{i_1} et X_{i_2} chose qui n'est pas vraie car les X_i forment une partition de E. Donc forcèment $X_{i_1} = X_{i_2}$ ce qui implique que $i_1 = i_2$. Finalement, on a $\exists i \in \{1,2,...,n\}, \text{ tel que } (x \in X_i \text{ et } z \in X_i) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2. $cl(x) = \{y \in E/x\mathcal{R}y\} = X_i$.

Exercice 3 :

Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x,y)\mathcal{R}(x',y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1,2),(3,1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Solution Exercice 3

1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre :

– $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow (x \leqslant x \text{ et } y \leqslant y)$.

– $\mathcal{R}$ est anti-symétrique :$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x,y) \Rightarrow (x' \leqslant x \text{ et } y' \leqslant y) \end{cases} \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

– $\mathcal{R}$ est transitive :$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y') \\ (x',y')\mathcal{R}(x'',y'') \Rightarrow (x' \leqslant x'' \text{ et } y' \leqslant y'') \end{cases} \Rightarrow x \leqslant x'' \text{ et } y \leqslant y'' \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x'',y'').$$

L'ordre n'est pas total car par exemple $(0,1)$ n'est pas en relation avec $(1,0)$ et inversement.

2. Soit $A = \{(1,2),(3,1)\}$.
(m_1, m_2) un minorant de A si $\forall (x,y) \in A : (m_1,m_2)\mathcal{R}(x,y)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \leqslant 1 \wedge m_1 \leqslant 3 \\ m_2 \leqslant 2 \wedge m_2 \leqslant 1 \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des minorants $\mathcal{N} = \{(m_1,m_2) \in \mathbb{R}^2 / m_1 \leqslant 1 \wedge m_2 \leqslant 1\}$.
(M_1, M_2) un majorant de A si $\forall (x,y) \in A : (x,y)\mathcal{R}(M_1,M_2)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 \geqslant 1 \wedge M_1 \geqslant 3 \\ M_2 \geqslant 2 \wedge M_2 \geqslant 1 \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des majorants $\mathcal{M} = \{(M_1,M_2) \in \mathbb{R}^2 / M_1 \geqslant 3 \wedge M_2 \geqslant 2\}$.
Conclusion : $SupA = (3,2)$ et $InfA = (1,1)$.
3. La partie A ne possède ni plus petit élément ni plus grand élément.

Exercice 4 :
On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leqslant b+1.$$

1. Vérifier que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$. Donner une conclusion.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b+1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

Solution Exercice 4
1. On peut vérifier facilement que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$ mais $0 \neq 1$ ce qui implique que $\mathcal{S}$ n'est pas anti-symétrique.
2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$:
a. La réflexivité : soit $a \in \mathbb{Z}, a\mathcal{R}a \Rightarrow a < a+1$ une proposition qui est vraie.
b. L'anti-symétrie : soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \Rightarrow a < b+1 \Rightarrow a \leqslant b \\ b\mathcal{R}a \Rightarrow b < a+1 \Rightarrow b \leqslant a \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

c. La transitivité : soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{cases} a\mathcal{R}b \Rightarrow a < b+1 \Rightarrow a \leqslant b \\ b\mathcal{R}c \Rightarrow b < c+1 \Rightarrow b \leqslant c \end{cases} \Rightarrow a \leqslant c \Rightarrow a < c+1 \Rightarrow a\mathcal{R}c.$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.