Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 3 : Relations binaires

Exercice 1 :
Soit $\mathcal{R}$, la relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout réel x.
3. Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 2 :
Soit E un ensemble et $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ une partition de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ dans E en posant, pour tout couple $(x, y) \in E^2$:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2, ..., n\},\ \text{tel que } (x \in X_i \text{ et } y \in X_i).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 3 :
Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par :

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?
2. Préciser deux majorants, deux minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{(1, 2), (3, 1)\}$.
3. La partie A possède t-elle un plus grand élément et un plus petit élément ?

Exercice 4 :
On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{S}$ par :

$$a\mathcal{S}b \Leftrightarrow a \leqslant b + 1.$$

1. Vérifier que $0\mathcal{S}1$ et $1\mathcal{S}0$. Donner une conclusion.
2. Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b + 1.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.