

Exercice 1 :

Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E . Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \bar{B}$ ainsi que $\bar{A} \cap B$.

1. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$.

2. $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [3; +\infty[$.

3. $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{N}$, $B =]0; +\infty[$.

Solution Exercice 1

1. $A \cap B = \{2\}$; $A \cup B = \{1, 2, 4\}$; $A \cap \bar{B} = \{1\}$; $\bar{A} \cap B = \{4\}$.

2. $A \cap B = \emptyset$; $A \cup B =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$; $A \cap \bar{B} = A$; $\bar{A} \cap B = B$.

3. $A \cap B = \mathbb{N}^*$; $A \cup B = [0; +\infty[$; $A \cap \bar{B} = \{0\}$; $\bar{A} \cap B = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A . Démontrer les propriétés suivantes :

a. $C_A(C_A(X)) = X$.

b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.

c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Solution Exercice 2

a. Montrons que $C_A(C_A(X)) = X$.

i). Montrons que $C_A(C_A(X)) \subset X$. Soit $x \in C_A(C_A(X))$. Cela veut dire que $x \notin C_A(X)$, c'est à dire que $x \in X$. Donc $C_A(C_A(X)) \subset X$.

ii). Montrons que $X \subset C_A(C_A(X))$. Soit $x \in X$. Ceci implique que $x \notin C_A(X)$. Donc $x \in C_A(C_A(X))$. D'après i) et ii), on a montré l'égalité.

b. Soit $x \in C_A(X \cup Y)$. Ceci entraîne que $x \notin X \cup Y$. Cela veut dire que $x \notin X$ et $x \notin Y$. Donc $x \in C_A(X)$ et $x \in C_A(Y) \Rightarrow x \in C_A(X) \cap C_A(Y)$. L'implication dans le sens inverse ainsi que $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$ se démontre de la même manière.

c. Soit $x \in C_A(Y)$, ce qui implique que $x \notin Y$ et $x \notin X$ car $X \subset Y$ par hypothèse. Donc $x \in C_A(X)$. L'implication dans le sens inverse se démontre de la même manière.

Exercice 3 :

Soient A et B deux ensembles.

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité?

Solution Exercice 3

1. Montrons que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Soit $E \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow E \subset A \cap B \Leftrightarrow E \subset A$ et $E \subset B \Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ et $E \in \mathcal{P}(B)$.
 $\Leftrightarrow E \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

2. Montrons que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Soit $E \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A)$ ou $E \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow E \subset A$ ou $E \subset B$. Ceci implique que $E \subset A \cup B \Rightarrow E \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

En générale, on a pas égalité dans 2). Il suffit de prendre $A = \{1, 3\}$ et $B = \{2\}$.

Exercice 4 :

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E . On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

- Que valent $A\Delta A$ et $A\Delta\emptyset$?
- Montrer que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- Montrer que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
- Montrer que $(A\Delta B)\Delta B = A$.

Solution Exercice 4

a. $A\Delta A = \emptyset$ et $A\Delta\emptyset = A$.

b. Montrons que $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Donc $x \in A\Delta B$ si et seulement si ou bien $x \in A$ ou bien $x \in B$ (le ou exclusif). Alors on a $A\Delta B = \{x \in A \text{ ou bien } x \in B\}$.

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \vee x \notin A)\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\}.$$

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

c. Montrons que $A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B \text{ et } x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \vee x \in B) \text{ et } (x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B})\}.$$

$$A\Delta B = \{(x \in A \wedge x \in \overline{B}) \text{ ou } (x \in \overline{A} \wedge x \in B)\}.$$

$$A\Delta B = \{x \in A \cap \overline{B} \text{ ou } x \in \overline{A} \cap B\}.$$

$$A\Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}).$$

d. Montrons que $(A\Delta B)\Delta B = A$. Pour cela, calculons $(A\Delta B)\Delta C$.

$$(A\Delta B)\Delta C = [(\overline{A\Delta B}) \cap C] \cup [(A\Delta B) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [(\overline{(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}) \cap C] \cup [((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \cap \overline{C}].$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)] \cap C] \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$(A\Delta B)\Delta C = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

Maintenant, si $C = B$, on obtient :

$$(A\Delta B)\Delta B = (\overline{A} \cap \overline{B} \cap B) \cup (A \cap B \cap B) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{B}).$$

$$(A\Delta B)\Delta B = \emptyset \cup (A \cap B) \cup \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap E = A.$$

Exercice 5 :

Soit f une application de E vers F . Soient A et A' des parties de E . Soient B et B' des parties de F . Montrer que :

$$\begin{array}{ll} 1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\ 3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4) f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\ 5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Solution Exercice 5

1. Soit $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ par définition de $f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

2. Soit $y = f(x) \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y = f(x) \in B$.

3. "C" : Soit $y \in f(A \cup A') \Rightarrow \exists x \in A \cup A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A$ ou $\exists x \in A' : y = f(x)$.
 $(\exists x \in A : y = f(x))$ ou $(\exists x \in A' : y = f(x)) \Rightarrow y \in f(A)$ ou $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cup f(A')$.

"C" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.

4. Soit $y \in f(A \cap A') \Rightarrow \exists x \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A : y = f(x)$ et $\exists x \in A' : y = f(x)$.
 $\Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow y \in f(A) \cap f(A')$.

5. "C" : Soit $x \in f^{-1}(B \cup B') \Rightarrow f(x) \in B \cup B' \Rightarrow f(x) \in B$ ou $f(x) \in B'$.
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.

"C" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.

6. "C" : Soit $x \in f^{-1}(B \cap B') \Rightarrow f(x) \in B \cap B' \Rightarrow f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$.
 $\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

"C" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse.

Montrons que si f est injective alors on a égalité dans 4). En effet :

Soit $y \in f(A) \cap f(A') \Rightarrow y \in f(A)$ et $y \in f(A') \Rightarrow (\exists x_1 \in A : y = f(x_1))$ et $(\exists x_2 \in A' : y = f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car f est injective. Donc $\exists x = x_1 = x_2 \in A \cap A' : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cap A')$.

Exercice 6 :

Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. f de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $f(x) = 2x$.

2. g de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie par $g(x) = 2x + 1$.

3. h de \mathbb{Z} dans \mathbb{N} définie par $h(x) = |x| - [x]$.

4. u de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Solution Exercice 6

1. f est injective et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{N} .

2. g est injective et non surjective car les nombres pairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{N} .

3. h est non injective car $h(5) = h(6)$ mais $5 \neq 6$, et non surjective car les nombres impairs n'ont pas d'antécédents dans \mathbb{Z} .

4. u est injective et surjective donc bijective.

Exercice 7 :

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Solution Exercice 7

a. Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ car $g \circ f$ est injective.

b. Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists y \in F : z = g(y).$$

$g \circ f$ est surjective i.e

$$\forall z \in G, \exists x \in E : z = (g \circ f)(x).$$

Posons $y = f(x)$, alors $z = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$. Donc g est surjective.

Exercice 8 :

Soit h l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $h(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$.

1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\frac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?

2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.

a. Montrer que f est injective.

b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$.

c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1} .

Solution Exercice 8

1. Pour a non nul, on a $h(a) = \frac{4a}{a^2 + 1}$, et de même on trouve que $h(\frac{1}{a}) = \frac{4a}{a^2 + 1}$. Donc

l'application h n'est pas injective car par exemple $h(2) = h(\frac{1}{2})$ mais $2 \neq \frac{1}{2}$.

2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.

a. Montrons que f est injective : Soient $x_1, x_2 \in I$.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{4x_2}{x_2^2 + 1}.$$

Après un simple calcul on trouve :

$$(x_2 - x_1)[x_1x_2 - 1] = 0,$$

ce qui implique que $x_1 = x_2$ ou bien $x_1 = \frac{1}{x_2} \notin I \Rightarrow x_1 = x_2$.

b. Vérifions que : $\forall x \in I, f(x) \leq 2$. Il suffit de montrer que $f(x) - 2 \leq 0$. En effet :

$$f(x) - 2 = \frac{4x}{x^2 + 1} - 2 = \frac{4x - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{-2(x-1)^2}{x^2 + 1} \leq 0.$$

(Suite et fin Solution Exercice 8)

c. Montrons que f est une bijection de I sur $]0, 2]$. Il suffit de résoudre l'équation $y = f(x)$, et de trouver un unique x en fonction de y .

$$y = \frac{4x}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0.$$

$$\Delta = 4(4 - y^2) \geq 0 \text{ car } y \in]0, 2] \Rightarrow x_1 = \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - y^2}}{y}.$$

On remarque que $x_1 > 0$ et $x_1 \cdot x_2 = 1$ ce qui implique que $x_2 > 0$. Cherchons lequel des deux n'appartient pas à I .

$$x_1 - 1 = \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y} - 1 = \frac{2 - y + \sqrt{4 - y^2}}{y} \geq 0 \Rightarrow x_1 \in I.$$

Par l'absurde, on suppose que $x_2 \in I$ et on aboutit à une contradiction qui va nous permettre de dire que $x_2 \notin I$.

Conclusion : f est une bijection et f^{-1} définie de $]0, 2]$ sur I :

$$x = f^{-1}(y) = \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y}.$$