Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

1ère Année LMD Mathématique et Informatique — Algèbre 1

Fiche de TD 2 : Ensembles et Applications

Exercice 1 :
Dans chacune des questions suivantes, on donne un ensemble E et des parties A et B de E. Déterminer explicitement les ensembles $A \cap B, A \cup B, A \cap \overline{B}$ ainsi que $\overline{A} \cap B$.
1. $E = \{1,2,3,4\}, A = \{1,2\}, B = \{2,4\}$.
2. $E = \mathbb{R}, A =]-\infty; 2], B = [3; +\infty[$.
3. $E = \mathbb{R}, A = \mathbb{N}, B =]0; +\infty[$.

Exercice 2 :
Soit A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes :
a. $C_A(C_A(X)) = X$.
b. $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$ et $C_A(X \cap Y) = C_A(X) \cup C_A(Y)$.
c. $X \subset Y \Leftrightarrow C_A(Y) \subset C_A(X)$.

Exercice 3 :
Soient A et B deux ensembles.
1. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A \cup B) \supset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Y a-t-il égalité ?

Exercice 4 :
Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

a. Que valent $A \Delta A$ et $A \Delta \emptyset$?
b. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
c. Montrer que $A \Delta B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
d. Montrer que $(A \Delta B) \Delta B = A$.

Exercice 5 :
Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

$$\begin{array}{rr} 1) A \subset f^{-1}(f(A)) & 2) f(f^{-1}(B)) \subset B \\ 3) f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') & 4)\ f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A') \\ 5) f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') & 6) f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{array}$$

Montrer que si f est injective alors on a l'égalité dans 4).

Exercice 6 :
Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?
1. f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(x) = 2x$.
2. g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $g(x) = 2x + 1$.
3. h de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $h(x) = |x| - [x]$.
4. u de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par $u(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 7 :
Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.
a. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
b. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
Exercice 8 :
Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$.
1. Vérifier que pour tout réel a non nul on a $h(a) = h(\dfrac{1}{a})$. L'application h est-elle injective ?
2. Soit f définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = h(x)$.
a. Montrer que f est injective.
b. Vérifier que : $\forall x \in I, f(x) \leqslant 2$.
c. Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver f^{-1}.