Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

1ère année LMD Mathématique et Informatique — ALGÈBRE 1

Corrigé de la fiche de TD 1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1 : Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif'.
Écrire la table de vérité du " ou exclusif ".

Solution Exercice 1 :
Voici la table de vérité du " ou exclusif " :

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

On remarque que le " ou exlusif " est vrai que si les deux assertions p et q sont différentes.

Exercice 2 : Soient p et q deux propositions données. En utilisant la table de vérité, montrer que

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \text{ et } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Solution Exercice 2 :

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Rightarrow q$	$\overline{p \Rightarrow q}$	$p \wedge \overline{q}$	$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1

Exercice 3 : Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Solution Exercice 3 : Posons : E=(C ou D), et utilisons la distributivité de " et " par rapport à " ou " et inversement :
(A ou B) et (C ou D)$\Leftrightarrow$(A ou B) et E.
$\Leftrightarrow$(A et E) ou (B et E).
$\Leftrightarrow$(A et (C ou D)) ou (B et (C ou D)).
$\Leftrightarrow$(A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Pour résoudre le système, il suffit de poser A : $x-1=0$,B :$y-2=0$,C :$x-2=0$,D :$y-3=0$.
On aura :
$(x=1$ et $x=2)$ ou $(x=1$ et $y=3)$ ou $(x=2$ et $y=2)$ ou $(y=2$ et $y=3)$.
Donc l'ensemble des solutions $S = \{(1,3),(2,2)\}$.

Exercice 4 : Former la négation des propositions suivantes :

$$[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q) \text{ et } [(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r).$$

Solution Exercice 4 :

$$\begin{aligned}
\overline{[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)} &\Leftrightarrow \overline{[(p \Rightarrow q) \vee r]} \vee \overline{(p \vee q)} \\
&\Leftrightarrow [\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge \overline{r}] \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge \overline{q}) \wedge \overline{r}] \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)} &\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge \overline{(p \wedge r)} \\
&\Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})
\end{aligned}$$

Exercice 5 : Soient les quatre assertions suivantes :
$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$;
$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
Les assertions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Solution Exercice 5 : Attention ! l'ordre des quantificateurs est important !
L'assertion (a) est fausse : Est-ce- qu'on peut trouver un réel x pour que pour tout réel y leur somme soit toujours positive ? c'est pas toujours vraie ! sinon on peut montrer que $(\overline{a})$:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leqslant 0$ qui est vraie, il suffit de prendre par exemple $y = -(x + 1)$. On obtiendra $x + y = x - x - 1 = -1 \leqslant 0$.
L'assertion (b) est vraie : en effet, pour tout réel x il exsite un y qui dépend de x. Prenons $y = -x+1$ implique que $x+y = x-x+1 = 1 > 0$. Sa négation $(\overline{b})$:$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y \leqslant 0$.
L'assertion (c) est fausse. Il suffit de trouver un x et un y qui ne vérifie pas (c). Par exemple $x = -1$ et $y = 0$. On voit facilement que $x + y = -1 + 0 = -1 < 0$.
Sa négation $(\overline{c})$:$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leqslant 0$.
L'assertion (d) est vraie : Il suffit de prendre $x = -1$. On obtiendra que $y^2 > x = -1$, pour tout réel y. Sa négation $(\overline{d})$:$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 \leqslant x$.

Exercice 6 : Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression

" x est la fille de y ", où x et y sont dans F.

Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous) :
1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.
Par exemple, la première proposition s'écrit : " pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.

Solution Exercice 6
2. $\exists y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$. Sa négation :$\forall y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.
3. $\forall x \in F, \exists y \in F, P(x, y)$. Sa négation :$\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.
4. $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$. Sa négation :$\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$.

Exercice 7 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Solution Exercice 7

Posons $A(n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k$ et $B(n) = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Pour $n = 1$,

$$A(1) = \sum_{k=1}^{1}(-1)^k k = -1 = \frac{-(2+1)-1}{4} = B(1).$$

Donc la propriété est vraie pour le rang $n = 1$.

Supposons que la propriété est vraie pour le rang n, et montrons qu'elle reste vraie pour le rang $(n+1)$.

$$A(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1).$$

La quantité en vert, et en utilisant l'hypothèse de récurrence elle est égale à

$$\frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}.$$

Donc on a

$$A(n+1) = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) = \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4} = B(n+1)$$

On conclut que la propriété reste vraie pour le rang $(n+1)$.

Exercice 8 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$$P_n : 10^n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$
$$Q_n : 10^n + 1 \text{ est divisible par } 9.$$

1. Démontrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
2. Démontrer que si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie.
3. Un étudiant affirme : " Donc P_n et Q_n sont vraies pour tout entier naturel n ". Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4. Démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5. Démontrer que Q_n est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Solution Exercice 8
1. P_{n+1} : $10^{n+1}-1=10(10^n)-1=10(9k+1)-1=9(10k)+9=9(10k+1)=9k'$ car par hypothèse P_n : 10^n-1 est divisible par 9 i.e $10^n-1=9k, k\in\mathbb{N}$.
2. Q_{n+1} : $10^{n+1}+1=10(10^n)+1=10(9k-1)+1=9(10k)-9=9(10k-1)=9k''$ car par hypothèse Q_n : 10^n+1 est divisible par 9 i.e $10^n+1=9k, k\in\mathbb{N}$.
3. On voit que 2,11,101,1001,...ne sont pas divisibles par 9. Donc pour $n=0$, la première hypothèse de la démonstration par recurrence pour dire que Q_n est vraie n'est pas vérifiée. C'est l'erreur commise par l'étudiant.
4. Montrons par récurrence que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
Pour $n=0$, P_0 : $10^0-1=1-1=0$ est divisible par 9. D'après la question 1, P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5. Montrons que Q_n est fausse pour tout entier naturel n. Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe au moins $k\in\mathbb{N}$ tel que Q_k est vraie et on montre que Q_{k-1} est vraie. De là on peut déduire que pour tout $n<k, Q_n$ est vraie ce qui est absurde (en particulier pour $n=0$).

Exercice 9 : Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 paires de chaussettes.

Solution Exercice 9
On va procèder par l'absurde. Supposons que nous rangeons $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts et que chaque tiroir contient au moins 3 paires de chaussettes ou bien au plus une paire de chaussette.
On distingue deux cas :
1. Si chaque tiroir contient une paire, donc pour n tiroir on obtiendra n paires de chaussettes contradiction avec l'hypothèse de départ.
2. Si chaque tiroir contient au mois 3 paires i.e nombre de paires $\geqslant 3$. Si on montre que c'est absurde pour le cas =3, sa sera de même pour les cas >3.
Si le nombre de paires =3, donc dans chaque tiroir en mettra 3 paires ce qui nous donne à la fin $3n$ paires dans n tiroirs ce qui est absurde.

Exercice 10 : Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante pour $n\in\mathbb{N}^*$:

Si l'entier (n^2-1) n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n=4k+r$ avec $k\in\mathbb{N}$ et $r\in\{1,3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Solution Exercice 10

1. La contraposée est :

Si l'entier n est impair, alors l'entier $(n^2 - 1)$ est divisible par 8.

2. Admettons qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$.
Prouvons la contraposée.
Calculons $n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = 8(2k^2 + kr) + r^2 - 1$.
Puisque $r \in \{1, 3\}$ alors on distingue deux cas possibles :
i. Si $r = 1$ alors $n^2 - 1 = 8k'$ avec $k' = 2k^2 + k$.
ii. Si $r = 3$ alors $n^2 - 1 = 8k'$ avec $k' = 2k^2 + 3k + 1$.
Donc, dans les deux cas on a $n^2 - 1$ est divisible par 8.

Pour prouver qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$, il suffit de remplacé le k par $2k$ et $2k + 1$ dans la formule connue d'un entier impair $n = 2k + 1$.

Exercice 11 : Montrer par l'absurde que

$$\forall a, b \geqslant 0 : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$

Solution Exercice 11

Par l'absurde : Soient $a, b \geqslant 0$. Supposons que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$.

$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a(a+1) = b(b+1) \Rightarrow a^2 - b^2 = b - a \Rightarrow (a-b)(a+b) = b - a.$$

Puisque $a \neq b$ alors on peut diviser par $a - b \neq 0$.
On aboutit à : $a + b = -1$ contradition avec le faite que $a, b \geqslant 0$. D'où le résultat.