
1ère année LMD Mathématique et Informatique ALGÈBRE 1

Fiche de TD 1 : Logique et Raisonnements

Exercice 1 : Dans le LMD mathématique et informatique, un étudiant qui sera admis en deuxième année choisira entre mathématique OU informatique mais pas les deux simultanément. C'est le OU 'exclusif'.
Écrire la table de vérité du " ou exclusif ".

Exercice 2 : Soient p et q deux propositions données. En utilisant la table de vérité, montrer que

$$\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q}) \text{ et } (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow \overline{p}).$$

Exercice 3 : Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :
(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D).
Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 : Former la négation des propositions suivantes :

$$[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q) \text{ et } [(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r).$$

Exercice 5 : Soient les quatre assertions suivantes :
$(a) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(b) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$;
$(c) \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$; $(d) \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$.
Les assertions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

Exercice 6 : Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression

" x est la fille de y ", où x et y sont dans F.

Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous) :
1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit : " pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y " dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \underline{\exists x \in F}, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, \overline{P(x, y)}$.

Exercice 7 : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \frac{(-1)^n (2n+1) - 1}{4}.$$

Exercice 8 : Pour tout entier naturel n, on considère les deux propriétés suivantes :

$$P_n : 10^n - 1 \text{ est divisible par } 9.$$
$$Q_n : 10^n + 1 \text{ est divisible par } 9.$$

1. Démontrer que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
2. Démontrer que si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie.
3. Un étudiant affirme : " Donc P_n et Q_n sont vraies pour tout entier naturel n ". Expliquer pourquoi il commet une erreur grave.
4. Démontrer que P_n est vraie pour tout entier naturel n.
5. Démontrer que Q_n est fausse pour tout entier naturel n.

On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde.

Exercice 9 : Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant 2 paires de chaussettes.

Exercice 10 : Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k+r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.

Exercice 11 : Montrer par l'absurde que

$$\forall a, b \geqslant 0 : \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b.$$