Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Épreuve de Rattrapage.
Dimanche 29/09/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1 : (08pts) On se propose d'étudier la suite réelle définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = & x_n(1 - x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 = a \end{cases}$$

où a est un paramètre réel fixé.

1. Supposons (pour cette question) que cette suite converge. Quelles sont les valeurs possibles pour sa limite.
2. Montrer que cette suite est décroissante.
3. Prenons $0 < a < 1$. Montrer par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < x_n < 1$. En déduire que (x_n) converge.
4. Que se passe-t-il dans les cas particuliers $a = 0$ et $a = 1$?
5. Prenons enfin $a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$. Montrer alors qu'elle n'est pas convergente.

Exercice 2 : (07pts) Soit P un polynôme réel de degré 4 possédant quatre racines réelles distinctes deux à deux. A l'aide du théorème de Rolle, montrer que P' (le polynôme dérivé) possède trois racines réelles distinctes deux à deux.
(Indication : on commencera par poser $a < b < c < d$ pour désigner les quatre racines de P)

Exercice 3 : (05pts) A l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, montrer que l'équation

$$\text{(E)} \qquad x^2 = x \sin x + \cos x$$

admet au moins deux solutions réelles.

1ère Année M.I - Semestre I - 2018/2019

Module: "Analyse I" - Rattrapage -

Corrigé

Exercice 1: (08 pts) $\begin{cases} x_{n+1} = x_n(1-x_n), & \forall n \in \mathbb{N} \\ x_0 = a & (a \in \mathbb{R} \text{ fixé}) \end{cases}$

1°/ Valeur(s) de la limite: Supposons que $l = \lim_{n \to +\infty} x_n$ existe.
Alors elle vérifie l'équation $l = l(1-l)$ 1pt
$\iff l^2 = 0 \iff \boxed{l = 0}$

2°/ Décroissance de (x_n): Il suffit d'étudier le signe de $x_{n+1} - x_n$.
$x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 - x_n = -x_n^2 \leq 0$, donc cette 1pt
suite est décroissante.

3°/ Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < 1$ (si $0 < a < 1$). C'est clair pour $0 < x_0 = a < 1$
par hypothèse. Supposons alors qu'on arrive à n avec $0 < x_n < 1$.
Il faut montrer que $0 < x_{n+1} < 1$. Or $0 < x_n < 1 \Rightarrow 0 < 1 - x_n < 1$ 1pt
d'où par multiplication $0 < x_n(1-x_n) < 1$ càd $0 < x_{n+1} < 1$.
Nous avons déjà montré que (x_n) est décroissante, maintenant
(avec $0 < a < 1$) elle est en plus minorée par 0, donc elle est 1pt
décroissante + minorée $\Longrightarrow$ convergente, et donc l existe et $l = 0$

4°/ Les cas $a = 0$, $a = 1$: * Si $a = x_0 = 0$, alors $\forall n \geq 1$, $x_n = 0$
La suite sera constante égale à 0, et donc convergente vers 0. 1pt

* Si $a = x_0 = 1$, alors $x_1 = 0$ et après $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, $\forall n \geq 1$.
La suite est constante égale à 0 à partir de $n = 1$, donc convergente vers 0. 1pt

5e/ Les cas $a \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$:

* Si $a = x_0 < 0$, alors $\forall n \geq 1$, $x_n \leq a < 0$ puisqu'elle est décroissante. Donc ne peut pas avoir une limite finie car sinon "elle descend vers 0" (Absurdité). 1pt

* Si $a = x_0 > 1$; alors $x_1 = a(1-a) < 0$, et tous les autres $x_n \leq x_1 < 0$ toujours à cause de la décroissance. Ainsi elle ne peut avoir une limite finie, car la seule limite possible est 0, par la 1ère question. 1pt

En définitive dans ce cas (x_n) diverge.

Exercice 2 : (07pts)

Hypothèse : P un polynôme de degré 4 (réel) ayant $a < b < c < d$ quatre racines réelles.

Problème : P' possède 03 racines distincts deux à deux ?

On a dans l'intervalle $[a, b]$, P continu et dérivable (partout) de plus $P(a) = P(b) = 0$; donc par le théorème de Rolle $\exists \alpha \in]a, b[$ tq : $P'(\alpha) = 0$. 2pts

On fait la même chose dans les intervalles $[b, c]$ et $[c, d]$

Donc $\exists \alpha, \beta, \gamma$ tels que $a < \alpha < b < \beta < c < \gamma < d$. 2pts +2pts

et $P'(\alpha) = P'(\beta) = P'(\gamma) = 0$.

Le fait que α, β, γ soient deux à deux distincts est évident. 1pt

Rque : Il ne peut y avoir d'autres racines pour P' car il est de degré 3 et possède au plus 03 racines réelles.

Exercice 3 : (05 pts).

$$(E) : x^2 = x\sin x + \cos x$$

Posons $f(x) = x^2 - x\sin x - \cos x$. Ainsi l'équation (E) est équivalente à $f(x) = 0$. 1pt

f est continue sur $\mathbb{R}$ car "composée" de fonctions continues : x, x^2, $\sin x$, $\cos x$ et d'opérations $\times$ et $-$. 1pt

$f(0) = -1$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left[1 - \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\right] = +\infty$$ 1pt

car $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$.

Donc * sur l'intervalle $[0, +\infty[$ on a :

$f(0) = -1$ et $\exists a > 0$ grand tq $f(a) > 0$

et par le thm des valeurs intermédiaires, $\exists \alpha > 0$ telle que $f(\alpha) = 0$ car $0 \in [-1, f(a)]$. 1pt

* sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ on a :

$f(0) = -1$ et $\exists b < 0$, $|b|$ grand tel que $f(b) > 0$ 1pt

et on raisonne de la m façon, $\exists \beta < 0$ tq $f(\beta) = 0$ car $0 \in [-1, f(b)]$.