Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
Lundi 07 Janvier 2019

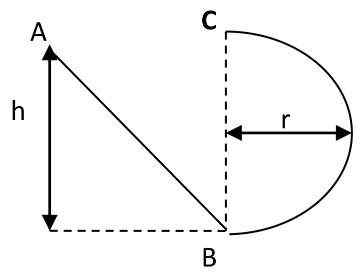
Année Universitaire 2018/2019
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

ÉPREUVE FINALE DE MECANIQUE

Questions de cours: (6pts)

1- Donnez les trois lois de Newton.
2- Quelle est la différence entre une force conservative et une force non conservative avec des exemples pour chaque cas
3- Dans quel cas nous avons une conservation de l'énergie mécanique, et qu'est ce qu'on a dans le cas contraire.
4- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique avec la démonstration
5- Une bille est lancée sans vitesse initiale et sans frottements à l'intérieure d'une gouttière

Trouver la hauteur pour laquelle la bille atteint le point C et change de direction.



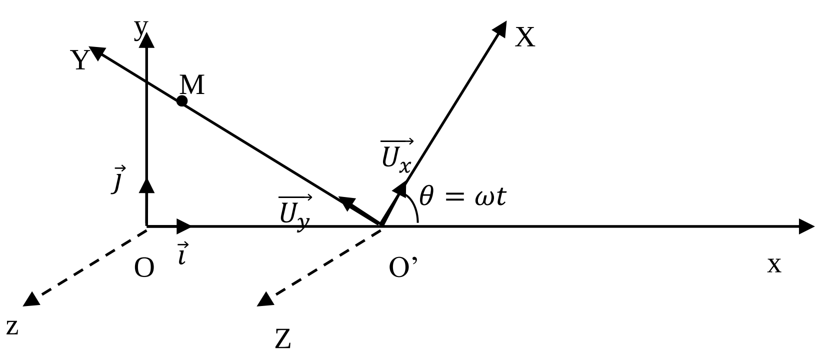
Exercice 1 (7 pts) :

Soit le repère R(Oxyz) et le point O' se déplace sur l'axe (Ox) avec une vitesse constante v_0. On lie à O' le repère (O'XYZ) qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire ω constante. Le mobile M se déplace sur l'axe (O'Y) avec une accélération γ constante (sans vitesse initiale).

A l'instant t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox) et le point M est en O'.

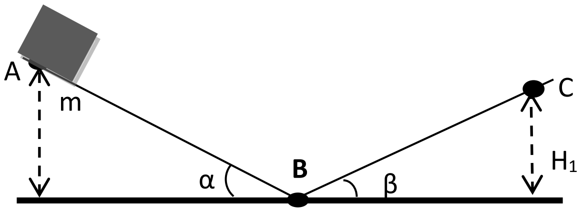
Calculer dans le **repère mobile** :

1- La vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$, en déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.
2- L'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$, l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$, en déduire l'accélération absolue $\overrightarrow{a_a}$.



Exercice 2 (7 pts) :

On considère un petit bloc de masse m =5kg abandonné sans vitesse initiale au point A d'un plan incliné faisant un angle α=30° par rapport à l'horizontale (voir la figure 2). Le point A est à une hauteur h_0=5m.



1- Quelle est la valeur du coefficient de frottement statique μ_s qui permet de maintenir la masse en équilibre au point A.
2- Sachant que le coefficient du frottement dynamique sur le plan AB est μ_d=0.2, en appliquant le principe fondamental de la dynamique:
   - Quelle est la nature du mouvement sur AB ?
   - Calculer la vitesse du bloc lorsqu'il atteint le point B.
   - Que peut-on dire sur l'énergie mécanique totale de la masse m ?
3- Après le passage au point B à la vitesse V_B, la masse remonte le plan incliné BC (angle=20°), et il s'arrête au point C. Sachant que le coefficient de frottement reste le même, déterminer la hauteur h_1 du point C?

Corrigé de l'épreuve finale de Mécanique pour première année MI 2018/2019

Questions de cours (6 pts)

1- Les trois lois de Newton : 1.5 pts

Première loi de Newton ou principe d'inertie:

Si le corps matériel n'est soumis à aucune force:
- s'il est au repos, il reste au repos (0.25 pts)
- s'il est en mouvement, ce mouvement ne peut être que rectiligne uniforme (0.25 pts)

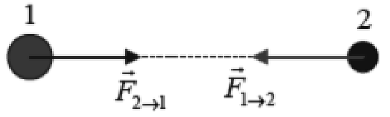
Deuxième loi de Newton ou principe fondamentale de la dynamique (P.F.D):

La résultante des forces exercées sur un corps est égale au produit de sa masse et son accélération. $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (0.5pts)

Troisième loi de Newton ou principe de l'action et la réaction:

Lorsque deux corps interagissent, la force exercée par le premier sur le second est égale et opposée à celle exercée par le second sur le premier (0.25 pts)

$\boxed{\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}}$ (0.25 pts)



2- La différence entre une force conservative et une force non conservative : 1.25pts

- Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi et on dit qu'elle dérive d'un potentiel (0.25 pts)
  Exemples : Force de pesanteur, le poids, force de rappel du ressort. (0.5 pts)
- Une force est dite non conservative si son travail dépend du chemin suivi (0.25 pts) comme le force de frottement. (0.25 pts)

3- Nous avons : 1pt

La conservation de l'énergie mécanique si les forces sont conservatives (0.25 pts). Dans ce cas $E_M = E_C + Ep = Cte$ donc $\Delta EM = 0$ (0.25 pts)
Et entre deux points A et B : $E_M(A) = E_M(B)$
Dans le cas de la présence de frottements (forces non conservatives) (0.25 pts)
$\Delta E_M = \sum Wfrott$ (0.25 pts)

4- **Le théorème de l'énergie cinétique :** 1.25 pts

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre deux positions A et B est égale à la somme des travaux de ces forces entre A et B. $\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_i\,(\vec{F}_{ext})$ (0.5 pts)

La démonstration :

Nous avons $dW = F_T dr$. Partant de cette expression on peut déduire ce qui suit :

$dW = F_T\, dr = m\frac{dv}{dt}\, dr$; avec $F_T = ma = m\frac{dv}{dt}$ (0.25 pts)

$\Rightarrow dW = m\,\frac{dr}{dt}\, dv \quad alors \quad dW = mvdv$ (0.25 pts)

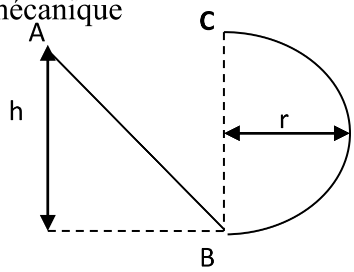
Intégrons l'expression du travail élémentaire, et tirons la définition de l'énergie cinétique :

$W = m\int_A^B v dv \quad \Rightarrow W = \frac{1}{2}\, m(v_B^2 - \, v_A^2)$ (0.25 pts)

Où v_A est la vitesse du mobile au point A et v_B sa vitesse au point B .

5- Une bille est lancée sans vitesse initiale et sans frottements à l'intérieure d'une gouttière. La hauteur pour laquelle la bille atteint le point C et change de direction. 1pt

En absence de frottements, il ya une conservation de l'énergie mécanique



E_M (A)= E_M (B) et E_M (B)= E_M (C)

- entre les deux points A et B

$E_{M_A} = E_{M_B} \Rightarrow E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$ (0.25 pts)

Alors $E_{P_A} = E_{C_B}(*)$

Car$E_{C_A} = 0$ puisque $v_A = 0$ car la bille est lancée sans vitesse initiale et $E_{P_B} = 0$ car au point B h=0

Donc (*)$\Rightarrow$ $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

- entre les deux points B et C

$E_{M_B} = E_{M_C} \Rightarrow E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$(0.25 pts)

Alors $E_{C_B} = E_{C_C} + E_{P_C}$

Puisque la bille change de direction lorsqu'elle atteint le point C donc la vitesse s'annule au point C (v_c =0) Donc E_{C_C}=0 (0.25 pts)

$\frac{1}{2}mv_B^2 = 0 + 2mgr$ et $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow\; mgh = 2mgr$

Donc **h=2r** (0.25 pts)

<u>Exercice 1 :</u> (7 pts)

1- Les vitesses : <u>3.5pts</u>

M se déplace sur l'axe OY avec une accélération constante donc $\overrightarrow{O'M} = Y\,\overrightarrow{u_y}$ et $\gamma = \frac{dv}{dt}$ et à t=0 le point M est en O'

$\gamma = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_0^v dv = \gamma \int_0^t dt$ donc $v = \gamma t$ (à t=0, v_0 (M)=0)

$v = \gamma t = \frac{dY}{dt} \Rightarrow \int_0^Y dY = \gamma \int_0^t t dt$ donc $Y = \frac{1}{2}\gamma t^2$ (à t=0, Y_0 (M)=0)

$\overrightarrow{O'M} = \frac{1}{2}\gamma t^2\, \overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

O' se déplace sur Ox avec une vitesse constante v_0 donc $\overrightarrow{OO'} = x\vec{\imath}$ et $v_0 = \frac{dx}{dt}$ et à t=0, l'axe (O'X) est confondu avec (Ox).

$v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = v_0 \int_0^t dt$ donc $x = v_0 t$ (à t=0, x_0 (O')=0)

$\overrightarrow{OO'} = v_0 t\vec{\imath}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{\mathrm{v_r}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{dO'M}}}{\mathrm{dt}} = \gamma\, \mathrm{t}\, \overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

$\overrightarrow{\mathrm{v_e}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{dOO'}}}{\mathrm{dt}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}}$ (0.25pts) avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$

En utilisant le tableau de passage

	$\overrightarrow{u_\rho}$	$\overrightarrow{u_\theta}$
$\vec{\imath}$	Cosθ	-sin θ
$\vec{\jmath}$	Sinθ	cosθ

Donc $\vec{\imath} = \cos\theta\, \overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\, \overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{\jmath} = \sin\theta\, \overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\, \overrightarrow{u_\theta}$

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{dOO'}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{v_0}\, \vec{\mathrm{i}} = \mathrm{v_0}\left(\cos\omega t\, \overrightarrow{\mathrm{u_x}} - \sin\omega t\, \overrightarrow{\mathrm{u_y}}\right)$ (0. 5pts)

$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathrm{u_x}} & \overrightarrow{\mathrm{u_y}} & \overrightarrow{\mathrm{u_z}} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma t^2 \omega\, \overrightarrow{\mathrm{u_x}}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{\mathbf{v_e}} = \left(-\frac{1}{2}\gamma t^2\omega + \mathrm{v_0}\cos\omega t\right) \overrightarrow{\mathbf{u_x}} + (-\mathrm{v_0}\sin\omega t)\, \overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.25pts)

$\overrightarrow{\mathbf{v_a}} = \overrightarrow{\mathbf{v_r}} + \overrightarrow{\mathbf{v_e}} = \left(-\frac{1}{2}\gamma t^2\omega + \mathrm{v_0}\cos\omega t\right) \overrightarrow{\mathbf{u_x}} + (\gamma t - \mathrm{v_0}\sin\omega t)\, \overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (0.5pts)

2- Les accélérations : <u>3.5pts</u>

$\overrightarrow{\mathbf{a_r}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{dv_r}}}{\mathbf{dt}} = \gamma\overrightarrow{\mathbf{u_y}}$ (1pts)

$\overrightarrow{\mathrm{a_e}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d^2OO'}}}{\mathrm{dt^2}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{d\omega}}}{\mathrm{dt}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}}$ (0. 5pts)

$\frac{\overrightarrow{\mathrm{d^2OO'}}}{\mathrm{dt^2}} = \vec{0}$ (0.25pts)

$\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\mathrm{u_x}} & \overrightarrow{\mathrm{u_y}} & \overrightarrow{\mathrm{u_z}} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\frac{1}{2}\gamma t^2\omega & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\gamma t^2\omega^2\, \overrightarrow{\mathrm{u_y}}$ (0.25pts)

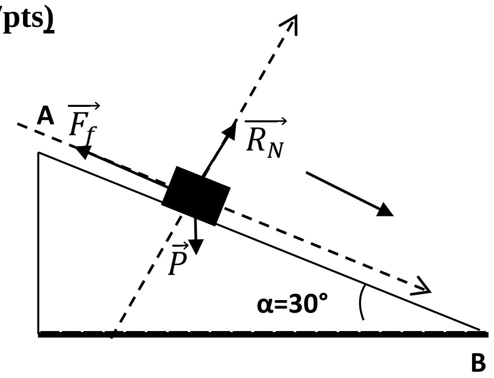
$\overrightarrow{\mathrm{a_e}} = -\frac{1}{2}\gamma t^2\omega^2\, \overrightarrow{\mathrm{u_y}}$ (0.25pts)

$$\overrightarrow{\mathbf{a_c}} = 2\vec{\omega} \therefore \overrightarrow{\mathbf{v_r}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_x} & \overrightarrow{u_y} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & \gamma t & 0 \end{vmatrix} = -2\gamma t\, \boldsymbol{\omega}\, \overrightarrow{\mathbf{u_x}}$$ (0.5pts)

$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}$ (0.25pts) donc $\overrightarrow{\mathbf{a_a}} = (-2\gamma t\, \omega)\, \overrightarrow{u_x} + \left(\gamma - \frac{1}{2}\gamma t^2 \omega^2\right) \overrightarrow{u_y}$ (0.5pts)

<u>Exercice 2: (07pts)</u>

(0.5pts)



1) Lorsque les frottements sont suffisants pour maintenir la masse en équilibre au point A, on a : <u>1.5pts</u>

$$\Sigma\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = \vec{0}$$ (0.5pts)

On choisit le repère, tel que l'axe (Ox) est suivant l'axe du mouvement parallèle à $\vec{f}$ et (Oy) est perpendiculaire à (Ox) donc suivant $\overrightarrow{R_N}$.

Suivant (Ox) : -f + m g sinα=0⇒ F_f = m g sinα (0.25pts)

Suivant (Oy): R_N-p_y=0⇒ R_N=m g cosα (0.25pts)

μ_s=tgφ=F_f/R_N⇒ $\mu_s = \frac{\text{Ff}}{\text{RN}} = \frac{sin\alpha}{\cos\alpha}$=0.58 (0.5pts)

2) a- L'accélération de la masse m sur AB: <u>03pts</u>

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = m\vec{a}$ (0.25pts)

Suivant (Ox) – f +p_x= -f + m g sinα=ma….(1)(0.25pts)

Suivant (Oy) R_N-p_y=0⇒ R_N=m g cosα……(2) (0.25pts)

μ_d=tgφ=F_f/R_N⇒F_f=N tg φ doncFf= μ_d m g cosα (0.25pts)

(1): - μ_d m g cosα + m g sinα=ma⇒a=g(sinα- $\mu_d$cosα)=3.27m/s^2 (0.5pts)
La nature du mouvement est: M.R.U.V
b- La vitesse au point B : on àv_A=0

$et\ v_B^2 - v_A^2 = 2a(AB) \Rightarrow v_B^2 = 2a(AB)$ (0.5pts)

avecsinα=h_0/(AB) ⇒(AB)=h_0/sinα=5/0.5=10m (0.25pts)

$\Rightarrow v_B = \sqrt{2(3.27)(10)} = 8.08m/s^{-1}$ (0.25pts) c- l'énergie mécanique totale de la masse m est non conservative car le système est soumis aux forces non conservatives tel que la force de frottement. (0.5pts)

3) La hauteur h_1 : on a $\mu_d=0.2$ <u>02pts</u>

En appliquant le PFD : $\Sigma\vec{F} = m\overrightarrow{a'} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{R_N} + \vec{f} = m\overrightarrow{a'}$ (0.25pts)

Suivant (Ox) $-F_f - p_x = -F_f - m\,g\,\sin\beta = ma' \ldots(1)$ (0.25pts)

Suivant (Oy) $R_N - p_y = 0 \Rightarrow R_N = m\,g\,\cos\beta$ (0.25pts) $\Rightarrow F_f = R_N\,\mu_d = \mu_d\,m\,g\,\cos\beta$ (0.25pts)

(1): $a' = -g\sin\beta - \mu_d\,g\cos\beta = -10(0.34+0.2*0.93)$

$a' = -5.26\,m/s^2$ (0.25pts)

$et\, v_C^2 - v_B^2 = 2a'(B) \Rightarrow -v_B^2 = 2a'(BC)$ (0.25pts)

D'où $AC = \frac{-v_B^2}{2a'} = 6.17m$ (0.25pts)

Alors $H_1 = (BC)\sin 20^\circ = 2.11m$ (0.25pts)