Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Épreuve Finale.
Mardi 08/01/2019 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (12pts) On considère l'équation

$$(\mathrm{E}_\lambda) \qquad e^{-x} = \lambda x$$

avec λ un paramètre réel.

1. Étudier la fonction $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, puis tracer sa courbe représentative.
2. Utiliser cette courbe pour donner, suivant les valeurs de λ, le nombre et le signe des solutions de (E_λ).
3. Dresser le tableau de variation de la fonction $\varphi(x) = xe^x$.
4. Prenons maintenant $\lambda = -n-3$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que (E_{-n-3}) possède une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$, qu'on notera x_n.
5. En utilisant la fonction φ, montrer que la suite (x_n) est croissante.
6. En déduire que (x_n) converge, puis déterminer sa limite.

Exercice 2: (08pts) On donne la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \ln\left(1 + x^2\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Déterminer son domaine de définition $\mathscr{D}_f$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et que f' est continue.
4. Peut-on appliquer à f le théorème des accroissements finis dans l'intervalle $[-1, 1]$? Si oui, trouver tous les réels c tels que $f(1) - f(-1) = 2f'(c)$.

On rappelle que : $e \approx 2,72$ et $\ln 2 \approx 0,69$.

$1^{ère}$ année M.I - Semestre 1 - 2018/2019

Module : « Analyse I » - Examen Final.

Corrigé.

Exercice 1 : (12 pts) (E_λ) : $e^{-x} = \lambda x$.

1°/ Etude de g : $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$. Il est clair que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ (limite connue) 0,25

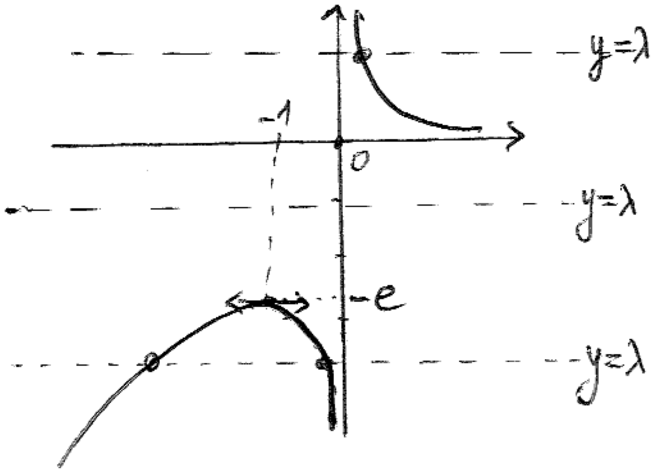
  Aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{x^2} = +\infty$, donc (C_g) présente une branche parabolique au voisinage de $-\infty$, dans la direction de $y'oy$.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x=0$ est une asymptote verticale. 0,25

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$, donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à C_g au voisinage de $+\infty$. 0,25

On a $g'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)e^{-x}$. $\quad + \;\; -1 \;\; - \;\; 0 \;\; -$ 0,25

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	0



1

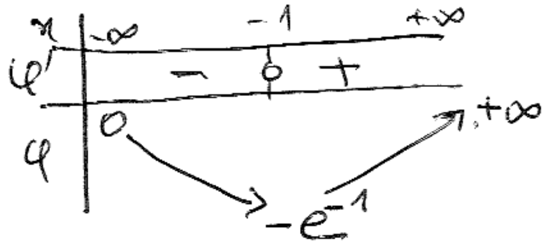
2°/ Solutions de (E_λ) : D'après le graphique, on voit que : $\left((E_\lambda) \Leftrightarrow g(x) = \lambda\right)$ 1
$x=0$ n'est pas une solution.

- Si $\lambda < -e$, il existe <u>deux</u> solutions <u>négatives</u>. 0,25
- Si $\lambda = -e$, " <u>une seule solution</u> $x = -1$. 0,25
- Si $-e < \lambda \leq 0$, pas de solution. 0,25
- Si $\lambda > 0$, il existe <u>une seule</u> solution positive. 0,25

3°/ Variations de $\varphi(x) = x e^x$:

La fonction φ est manifestement définie sur $\mathbb{R}$; $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ 1

et $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$. $\varphi'(x) = e^x(x+1)$ $\xrightarrow{\quad - \quad \underset{-1}{|} \quad + \quad}$



1

4°/ Cas de (E_{-n-3}) : On peut remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-n-3 \leq -3 < -e$, et donc on est dans le premier cas de la discussion de la 2ème question. Graphiquement on voit bien qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $[-1, 0]$. Mais on demande une démonstration rigoureuse à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. On peut réécrire l'équation (E_{-n-3}) ainsi :

$$e^{-x} + (n+3)x = 0.$$

Posons $H(x) = e^{-x} + (n+3)x$, cette fonction est continue (partout) sur $[-1, 0]$. De plus $H(0) = 1$ et $H(-1) = e - (n+3) = (e-3) - n < 0$ 1

car $e \simeq 2{,}72$ et $e - 3 \simeq -0{,}28 < 0$

Donc $0 \in [H(-1), H(0)]$ (ou bien $H(0) \cdot H(-1) < 0$). D'après le théorème de valeurs intermédiaires, il existe au moins une solution à l'équation $H(x) = 0$ dans $[-1, 0]$. D'autre part,

$H'(x) = -e^{-x} + (n+3) > 0$ sur $[-1, 0]$. En effet $-1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq e^{-x} \leq e \Rightarrow -e \leq -e^{-x} \leq 0 \Rightarrow n+3-e \leq H'(x) \leq n+3$ (et $3 > e$) 1

Donc H est strictement croissante sur $[-1, 0]$, ceci implique que la solution à $H(x) = 0$ est unique. Elle sera notée x_n.

5°/ (x_n) est croissante : On a d'une part $H(x_n) = 0 \iff e^{-x_n} = -(n+3)x_n \iff \varphi(x_n) = \frac{-1}{n+3}$. D'autre part, d'après la question 3°/, la fonction φ est (continue) strictement croissante sur $[-1, 0]$, donc admet une fonction réciproque φ^{-1}, aussi strictement croissante. Mais $x_n = \varphi^{-1}\left(\frac{-1}{n+3}\right)$, donc puisque 2

$$\frac{-1}{n+3} < \frac{-1}{n+4} \Rightarrow \varphi^{-1}\left(\frac{-1}{n+3}\right) < \varphi^{-1}\left(\frac{-1}{n+4}\right) \text{ càd } x_n < x_{n+1}.$$

Rque : $\varphi : [-1, 0] \to [-e^{-1}, 0]$ et $\varphi^{-1} : [-e^{-1}, 0] \to [-1, 0]$, aussi $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{-1}{n+3} \in [-e^{-1}, 0]$.

6°/ Convergence de (x_n) : D'après ce qui précède, la suite (x_n) est croissante majorée (par exemple par 0) puisque $x_n \in [-1,0]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc (x_n) est convergente. Appelons l sa limite. On a 1

$$x_n e^{x_n} = \frac{-1}{n+1} \Rightarrow l e^{l} = 0 \Rightarrow \boxed{l = 0}$$ 1

Exercice 2 : (08 pts) $f(x) = \begin{cases} 1 + x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + \ln(1+x^2) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

1°/ Le domaine : L'expression $1 + x\sqrt{x}$ est bien définie si $x \geq 0$, or c'est justement la valeur de $f(x)$ pour les $x \geq 0$. Pour $x < 0$, on a $x^2 > 0$ et $x^2 + 1 > 1$ et donc le logarithme est bien défini. Ainsi 1

$\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

2°/ Continuité : * Sur $\mathbb{R} - \{0\}$, f est continue car définie à partir de fonctions continue $x \to x$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to 1$ et $x \to \ln(1+x^2)$ avec des opérations algébriques. 0,5

* Reste la continuité en 0 : On a $f(0) = 1 + 0 \cdot \sqrt{0} = 1$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + x\sqrt{x} = 1 = f(0)$$ 1

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} 1 + \ln(1+x^2) = 1 = f(0)$$

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3°/ Dérivabilité : * Pour des raisons analogues à ceux de la continuité, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$. 0,5

* Dérivabilité en 0 : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\ln(1+x^2)}{x} =$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 0 = f'_g(0) \text{ car } \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0 = f'_d(0)$$ 1.

Comme $f'_d(0) = f'_g(0)$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$ 0,5

* f' est manifestement continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
* $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{3}{2}\sqrt{x} = 0 = f'(0) \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{2x}{1+x^2} = 0 = f'(0) \end{array}\right\} \text{donc } f' \text{ est continue en } 0.$$ 0,5

D'où f' continue sur $\mathbb{R}$.

4°/ <u>Oui</u> on peut appliquer à f le théorème des accroissements finis, car f est continue sur $[-1,1]$ (continue déjà sur $\mathbb{R}$), et dérivable sur $]-1,1[$ (dérivable sur $\mathbb{R}$). Ainsi $\exists\, c \in]-1,1[$ tel que 1

$$f(1) - f(-1) = 2 f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad 2 - (1 + \ln 2) = 2 f'(c)$$

$$\Rightarrow \quad f'(c) = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

Remarquons que $1 - \ln 2 \simeq 1 - 0{,}69 \simeq 0{,}31 > 0$, donc il faut chercher c parmi les "x" tels que $f'(x) > 0$. Or pour $x < 0$, $f'(x) < 0$.

Donc $f'(c) = \frac{1-\ln 2}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt{c} = \frac{1-\ln 2}{2} \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1-\ln 2}{3}$ 2

et $\boxed{c = \left(\frac{1-\ln 2}{3}\right)^2.}$