Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2018-2019**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques **Date : 06/01/2019**

1ère Année LMD MI Durée : 01H30.

Epreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)

Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : m\mathcal{R}n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Exercice 2 : (08 points)

Soit $G =]-1, +1[$ muni de la loi interne $*$ où $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$.
1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
2. Soit x, un réel strictement positif fixé. On forme l'ensemble :

$$H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \ / \ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Montrer que H_x est un sous-groupe de $(G, *)$.

Exercice 3 : (06 points)

Soient X, X' deux ensembles et $f : X \to X'$ une application.
1. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ (image réciproque) pour une partie $B \subset X'$.
2. Montrer que $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
3. Montrer que $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
4. En déduire que $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(\overline{C \cup D}) = f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D})$.

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : 06/01/2019

1ère Année LMD MI — Durée : 01H30.

Corrigé de l'épreuve finale : Algèbre 1

Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits

Exercice 1 : (06 points)
Dans $\mathbb{N}^*$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^* : m\mathcal{R}n \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$.
2. Déterminer l'ensemble des majorants, l'ensemble des minorants, la borne supérieure et la borne inférieure de la partie $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?

Solution Exercice 1 :
1. Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$:

– $\mathcal{R}$ est réflexive car : $\forall n \in \mathbb{N}^* : n\mathcal{R}n \Leftrightarrow \exists k = 1 \in \mathbb{N}^* : n = 1.n.$ $\boxed{0.5\text{pt}}$
– $\mathcal{R}$ est anti-symétrique. En effet :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m \\ n\mathcal{R}m \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : m = k_2 n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = k_1 k_2 n \\ n = k_1 m \\ m = k_2 n \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(1 - k_1 k_2) = 0 \\ n = k_1 m \\ m = k_2 n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 k_2 = 1 \text{ car } n \neq 0. \\ n = k_1 m \\ m = k_2 n \end{cases} \boxed{0.5\text{pt}}$$

Ce qui donne que $k_1 = k_2 = 1$ et $n = m.$ $\boxed{0.5\text{pt}}$
– $\mathcal{R}$ est transitive car :

$$\begin{cases} m\mathcal{R}n \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^* : n = k_1 m \\ n\mathcal{R}p \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* : p = k_2 n \end{cases} \Rightarrow p = k_1 k_2 m. \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow \exists k = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^* : p = km \Rightarrow m\mathcal{R}p. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel car par exemple 2 n'est pas en relation avec 3 et inversement. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. M est un majorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : n\mathcal{R}M$ $\boxed{0.25pt}$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : M = kn$.

$$\begin{cases} M = 4k_1, k_1 \in \mathbb{N}^* \\ M = 5k_2, k_2 \in \mathbb{N}^* \\ M = 6k_3, k_3 \in \mathbb{N}^* \\ M = 7k_4, k_4 \in \mathbb{N}^* \\ M = 8k_5, k_5 \in \mathbb{N}^* \\ M = 9k_6, k_6 \in \mathbb{N}^* \\ M = 10k_7, k_7 \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Le seul M qui convient est le plus petit commun multiple de 4,5,6,7,8,9 et 10 i.e $M = 2520$. L'ensemble des majorants $\mathcal{M} = \{2520p \ /p \in \mathbb{N}^*\}$ $\boxed{0.25pt}$ $\Rightarrow SupA = 2520$. $\boxed{0.5pt}$

m est un minorant de $A \Leftrightarrow \forall n \in A : m\mathcal{R}n$ $\boxed{0.25pt}$ $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : n = km$.

$$\begin{cases} 4 = mk_1, k_1 \in \mathbb{N}^* \\ 5 = mk_2, k_2 \in \mathbb{N}^* \\ 6 = mk_3, k_3 \in \mathbb{N}^* \\ 7 = mk_4, k_4 \in \mathbb{N}^* \\ 8 = mk_5, k_5 \in \mathbb{N}^* \\ 9 = mk_6, k_6 \in \mathbb{N}^* \\ 10 = mk_7, k_7 \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Le seul m qui convient est le plus grand commun diviseur de 4,5,6,7,8,9 et 10 i.e $m = 1$. L'ensemble des minorants $\mathcal{N} = \{1\}$ $\boxed{0.25pt}$ $\Rightarrow infA = 1$. $\boxed{0.5pt}$

A ne possède ni plus grand élément ni plus petit élément. $\boxed{0.5pt}$

Exercice 2 : (08 points)

Soit $G =]-1,+1[$ muni de la loi interne $*$ où $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$.

1. Montrer que $(G,*)$ est un groupe abélien.
2. Soit x, un réel strictement positif fixé. On forme l'ensemble :

$$H_x = \left\{\frac{x^n-1}{x^n+1} \ / \ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Montrer que H_x est un sous-groupe de $(G,*)$.

Solution Exercice 2 :

1. Montrons que $(G,*)$ est un groupe abélien :

a. Montrons que $*$ est associative i.e $\forall a,b,c \in G : a*(b*c) = (a*b)*c$. $\boxed{0.5pt}$

$$a*(b*c) = a*(\frac{b+c}{1+bc}) = \frac{a+\dfrac{b+c}{1+bc}}{1+a(\dfrac{b+c}{1+bc})} = \frac{a+abc+b+c}{1+bc+ab+ac}. \ \boxed{0.25pt}$$

$$(a*b)*c = (\frac{a+b}{1+ab})*c = \frac{\dfrac{a+b}{1+ab}+c}{1+c\dfrac{a+b}{1+ab}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ca+cb}. \ \boxed{0.25pt}$$

Donc $*$ est associative.

b. Montrons qu'il existe un élément neutre e dans G tel que

$$\forall a \in G : a * e = e * a = a \boxed{0.5\text{pt}}$$

.

$$a * e = a \Rightarrow \frac{a+e}{1+ae} = a \Rightarrow a + e = a + a^2 e \Rightarrow e(a^2 - 1) = 0 \boxed{0.25\text{pt}}$$

Ce qui implique que $e = 0 \in G$ car $a^2 \neq 1$. $\boxed{0.25\text{pt}}$

c. Montrons que pour tout $a \in G$, il existe un symétrique a' (inverse a^{-1}) dans G, i.e

$$a * a' = e \boxed{0.5\text{pt}} \Rightarrow \frac{a+a'}{1+aa'} = 0 \Rightarrow a + a' = 0 \Rightarrow a' = -a \in G. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Notons que $1 + aa' \neq 0$ (elle est même strictement positive).

d. La loi $*$ est commuattive car :

$$\forall a, b \in G : a * b = \frac{a+b}{1+ab} = \frac{b+a}{1+ba} = b * a. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Conclusion : $(G, *)$ est un groupe abélien. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. Montrons que $H_x = \left\{ \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \ / \ n \in \mathbb{Z} \right\}$ est un sous-groupe de G :

On remarque que $H_x \subset G$. En effet soit $a = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \in H_x$. Pour montrer qu'il est dans G il suffit de montrer que $-1 < a < +1$.

$$a - 1 = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} - 1 = \frac{-2}{x^n + 1} < 0 \boxed{0.25\text{pt}}$$

$$a + 1 = \frac{x^n - 1}{x^n + 1} + 1 = \frac{2x^n}{x^n + 1} > 0 \boxed{0.25\text{pt}}$$

a. $H_x \neq \emptyset$ car $e = 0 \in H_x$ (pour $n = 0$ on obtient $e = 0$). $\boxed{01\text{pt}}$

b. Montrons que $\forall a, b \in H_x : a * b^{-1} \in H_x$ $(b^{-1} = b')$.

Prenons $a = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, n \in \mathbb{Z}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ et $b = \frac{x^p - 1}{x^p + 1}, p \in \mathbb{Z}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$. Calculons $a * b^{-1}$.

Calculons d'abord $b^{-1} = b' = -b = \frac{1 - x^p}{x^p + 1}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

$$a * b^{-1} = \frac{\frac{x^n - 1}{x^n + 1} + \frac{1 - x^p}{x^p + 1}}{1 + (\frac{x^n - 1}{x^n + 1})(\frac{1 - x^p}{x^p + 1})} = \frac{(x^n - 1)(x^p + 1) + (1 - x^p)(x^n + 1)}{(x^n + 1)(x^p + 1) + (x^n - 1)(1 - x^p)} \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow a * b^{-1} = \frac{x^n - x^p}{x^n + x^p} = \frac{x^p}{x^p} \left(\frac{x^{n-p} - 1}{x^{n-p} - 1} \right) = \frac{x^{n-p} - 1}{x^{n-p} - 1} \in H_x. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 3 : (06 points)
Soient X, X' deux ensembles et $f : X \to X'$ une application.
1. Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ (image réciproque) pour une partie $B \subset X'$.
2. Montrer que $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
3. Montrer que $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
4. En déduire que $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(\overline{C \cup D}) = f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D})$.

Solution Exercice 3 :
1. Pour $B \subset X'$, $f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\}$. $\boxed{\text{01pt}}$
2. Montrons que $\forall C, D \subset X' : f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
"$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(C \cup D) \Rightarrow f(x) \in C \cup D \Rightarrow f(x) \in C$ ou $f(x) \in D$.
$\Rightarrow x \in f^{-1}(C)$ ou $x \in f^{-1}(D) \Rightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. $\boxed{\text{01pt}}$
"$\supset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse. $\boxed{\text{01pt}}$
3. Montrons que $\forall B \subset X' : f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
"$\subset$" : Soit $x \in f^{-1}(\overline{B}) \Rightarrow f(x) \in \overline{B} \Rightarrow f(x) \notin B \Rightarrow x \notin f^{-1}(B) \Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(B)}$. $\boxed{\text{01pt}}$
"$\supset$" : De la même manière on démontre l'inclusion inverse. $\boxed{\text{01pt}}$
4. D'après ce qui précède, et en remplaçant B par $C \cup D$ on obtient :

$$f^{-1}(\overline{C \cup D}) = \overline{f^{-1}(C \cup D)}. \boxed{\text{0.25pt}}$$

$$= \overline{f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)}. \boxed{\text{0.25pt}}$$

$$= \overline{f^{-1}(C)} \cap \overline{f^{-1}(D)}. \boxed{\text{0.25pt}}$$

$$= f^{-1}(\overline{C}) \cap f^{-1}(\overline{D}). \boxed{\text{0.25pt}}$$