Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ère Année LMD-MI
Mardi 18 Décembre 2018
Durée : 01 h 30min

Année Universitaire 2018/2019

Rattrapage du Contrôle Continu de Mécanique

Exercice 1:

La hauteur **H** d'un liquide de masse **M** contenu dans un cylindre de rayon **R** est donnée par la relation :

$$H = \frac{(2.\sigma.cos\alpha)}{(R.g.\rho)}$$

Ou α est l'angle de contact liquide-cylindre, ρ la masse volumique du liquide et g l'accélération de pesanteur.

1- En utilisant les équations aux dimensions, trouver la dimension de σ.
2- Déterminer l'incertitude relative sur σ en fonction des incertitudes absolues ΔR, Δg, ΔM et Δα.

Exercice 2:

Soit les trois vecteurs: $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$,$\vec{b} = 2\vec{\imath} + 2\sqrt{2}\vec{\jmath} + 2\vec{k}$et $\vec{c} = \sqrt{2}\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}$

1- Calculer les modules de ces vecteurs et en déduire leurs vecteurs unitaires$\overrightarrow{U_a}$, $\overrightarrow{U_b}$et $\overrightarrow{U_c}$
2- En considérant les angles θ_1 , θ_2 et θ_3 compris entre 0 et π, calculer : cos θ_1= cos($\vec{a}, \vec{b}$) cos θ_2= cos($\vec{b}, \vec{c}$),cos θ_3= cos($\vec{c}, \vec{a}$).
3- Calculer les composantes des vecteurs $\vec{A} = \vec{a}\Lambda\vec{b}$, $\vec{B} = \vec{b}\Lambda\vec{c}$ et $\vec{C} = \vec{c}\Lambda\vec{a}$.
4- En déduire sinθ_1, sin θ_2 et sin θ_3. Vérifier ces résultats à l'aide de la question 2.

Exercice 3:

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z)

1- Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques (x, y et z) en fonction des coordonnées polaires (ρ, θ et z)
2- Trouver l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$et $\overrightarrow{u_z}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$
3- Donner l'expression du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.
4- Ecrire l'expression du vecteur de déplacement élémentaire et déduire la vitesse du point M en coordonnées cylindriques.

Exercice 4:

Un corps se déplace sur une droite avec une accélération telle que
$a= -kv$ où k est une constante
Si à $t=0$; $v=v_0$ et $x=x_0$
Trouver sa vitesse et son déplacement dans le temps ainsi que v en fonction de x

Bon courage

Corrigé du rattrapage du contrôle continu 2018-2019

Exercice 1(6pts)

$$H = \frac{(2.\sigma.cos\alpha)}{(R.g.\rho)} \Rightarrow \sigma = \frac{HRg\rho}{2cos\alpha}$$

1- La dimension de σ

$[H] = L, [R] = L, [g] = LT^{-2}, [\rho] = ML^{-3}, [2] = 1, [cos\alpha] = 1$ (1.25)

$[\sigma] = \frac{L.L.LT^{-2}.ML^{-3}}{1} = MT^{-2}$ (0.75)

2- l'incertitude relative sur σ en fonction des incertitudes absolues ΔR, Δg, ΔM et Δα.

$\rho = \frac{m}{V}$, V est le volume du cylindre , $V = \pi R^2 H$ (0.5)et $\rho = \frac{m}{\pi R^2 H}$ (0.5)

Alors $\sigma = \frac{HRg\rho}{2cos\alpha} = \frac{gm}{2\pi Rcos\alpha}$ (0.5)

En utilisant la méthode logarithmique

Log σ=log g+log m-log 2π-log R-log $cos\alpha$ (0.5)

En passant à la dérivée $\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dg}{g} + \frac{dm}{m} - \frac{dR}{R} - \frac{dcos\alpha}{cos\alpha}$ (0.5)

$\Rightarrow \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dg}{g} + \frac{dm}{m} - \frac{dR}{R} - \frac{(-sin\alpha)}{cos\alpha} d\alpha$ (0.5)

(0.5)$\Rightarrow \frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \left|\frac{1}{g}\right| \Delta g + \left|\frac{1}{m}\right| \Delta m + \left|-\frac{1}{R}\right| \Delta R + \left|\frac{sin\alpha}{cos\alpha}\right| \Delta\alpha$

Donc $\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta R}{R} + tg\alpha\Delta\alpha$ (1pt)

Exercice 2 (4pts)

Soit les trois vecteurs: $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$,$\vec{b} = 2\vec{\imath} + 2\sqrt{2}\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{c} = \sqrt{2}\vec{\jmath} + \sqrt{2}\vec{k}$

1- Les modules de ces vecteurs

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3, |\vec{b}| = \sqrt{4+8+4} = 4, |\vec{c}| = \sqrt{2+2} = 2$ (0.75)

- Les vecteurs unitaires des trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}\ et\ \vec{c}$

$\overrightarrow{U_a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{2}{3}\vec{k}$, (0.25) $\overrightarrow{U_b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{2}{4}\vec{\imath} + \frac{2}{4}\sqrt{2}\vec{\jmath} + \frac{2}{4}\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \frac{1}{2}\vec{k}$ (0.25)

et $\overrightarrow{U_c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$ (0.25)

2- cos θ_1= cos$(\vec{a}, \vec{b})$ cos θ_2= cos$(\vec{b}, \vec{c})$,cos θ_3= cos$(\vec{c}, \vec{a})$.

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}| \cos\theta_1 \Rightarrow cos\theta_1 = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2+4\sqrt{2}+4}{12} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} = 0.97\ donc\ \theta_1 = 13.73°$ (0.25)

$\vec{b}.\vec{c} = |\vec{b}|.|\vec{c}|\cos\theta_2 \Rightarrow cos\theta_2 = \frac{\vec{b}.\vec{c}}{|\vec{b}|.|\vec{c}|} = \frac{4+2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.85\ donc\ \theta_2 = 31.39°$ (0.25)

$\vec{c}.\vec{a} = |\vec{c}|.|\vec{a}|\cos\theta_3 \Rightarrow cos\theta_3 = \frac{\vec{c}.\vec{a}}{|\vec{c}|.|\vec{a}|} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.94\ donc\ \theta_3 = 19.47°$ (0.25)

3- $\vec{A} = \vec{a}\Lambda\vec{b}$, $\vec{B} = \vec{b}\Lambda\vec{c}$ et $\vec{C} = \vec{c}\Lambda\vec{a}$.

$$\vec{A} = \vec{a}\Lambda\vec{b} = \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 2 \end{matrix} = (4-4\sqrt{2})\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + (2\sqrt{2}-4)\vec{k} \quad (0.25)$$

$$\vec{B} = \vec{b}\Lambda\vec{c} = \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{matrix} = (4-2\sqrt{2})\vec{\imath} + 2\sqrt{2}\vec{\jmath} + 2\sqrt{2}\vec{k} \quad (0.25)$$

$$\vec{C} = \vec{c}\Lambda\vec{a} = \begin{matrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} = \sqrt{2}\vec{\jmath} - \sqrt{2}\vec{k} \quad (0.25)$$

4- $\sin\theta_1$, $\sin\theta_2$ et $\sin\theta_3$

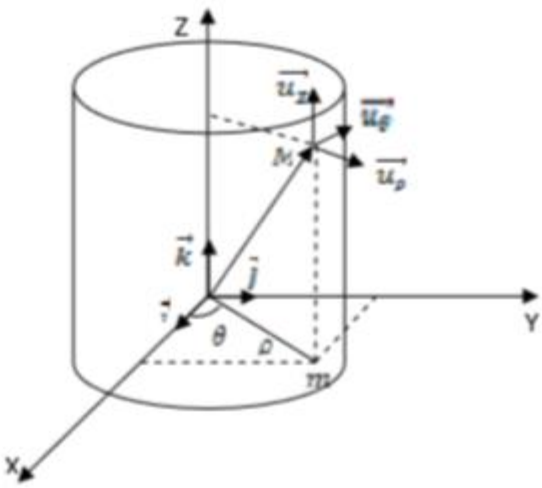
$|\vec{A}| = |\vec{a}\Lambda\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|\sin\theta_1 \Rightarrow sin\theta_1 = \frac{|\vec{a}\Lambda\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = 0.23\ donc\ \theta_1 = 13.73°$ (0.25)

$|\vec{B}| = |\vec{b}\Lambda\vec{c}| = |\vec{b}|.|\vec{c}|\sin\theta_2 \Rightarrow sin\theta_2 = \frac{|\vec{b}\Lambda\vec{c}|}{|\vec{b}|.|\vec{c}|} = 0.52\ donc\ \theta_2 = 31.39°$ (0.25)

$|\vec{C}| = |\vec{c}\Lambda\vec{a}| = |\vec{c}|.|\vec{a}|\sin\theta_3 \Rightarrow sin\theta_3 = \frac{|\vec{c}\Lambda\vec{a}|}{|\vec{c}|.|\vec{a}|} = \frac{1}{3}\ donc\ \theta_3 = 19.47°$ (0.25)

Donc les valeurs de $\theta_1, \theta_2\ et\ \theta_3$ n'ont pas changé par rapport à ceux trouvés dans la deuxième question (0.25)

Exercice:3 (7pts)



(0.5)

Les coordonnées cylindriques sont ρ et θ et z ;

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ (0.5)

M étant la projection de M sur le plan (Oxy)

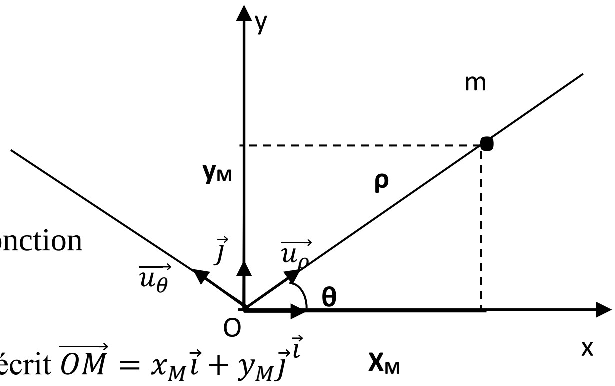
avec $\rho = |\overrightarrow{Om}|$; 0<ρ<R et l'angle $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om})$ avec 0<θ<2π et z=$|\overrightarrow{mM}|$ avec 0<z<H

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$en coordonnées cylindriques s'écrit

comme suit :$\overrightarrow{Om} = \rho\overrightarrow{u_\rho}\ et\ \overrightarrow{mM} = z\overrightarrow{u_z}$

1- les relations de passage entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes.

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{x_M}{\rho} \\ Sin\theta = \frac{y_M}{\rho} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \rho cos\theta \\ y_M = \rho sin\theta \end{cases}$$



z=z (1pt)

2- Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}$et $\overrightarrow{u_z}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}. et\ \vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$en coordonnées cartésiennes s'écrit $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OM} = \rho(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})$+z $\vec{k}$ (0.5)

On avait :$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}$ (en coordonnées cylindriques)

Par identification $\overrightarrow{u_\rho}$= $cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$; $\overrightarrow{u_z} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{u_\theta} = \frac{d\,\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$ (1.5)

3- l'écriture du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + 5\vec{k}$ en coordonnées cylindriques

Nous avons $\begin{cases} x_M = \rho cos\theta \\ y_M = \rho sin\theta \\ z_M = z \end{cases}$ et $\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_z} = \vec{k} \end{cases}$

En utilisant le tableau de passage

	$\overrightarrow{u_\rho}$	$\overrightarrow{u_\theta}$	$\overrightarrow{u_z}$
$\vec{\imath}$	Cosθ	-sin θ	0
$\vec{\jmath}$	Sinθ	cosθ	0
$\vec{k}$	0	0	1

Donc $\vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{\jmath} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et$\vec{k} = \overrightarrow{u_z}$ (1.5)

Le vecteur $\vec{A}$ s'écrit alors $\vec{A} = 2\rho cos\theta(\cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) - \rho sin\theta(\sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) + 5\overrightarrow{u_z}$

$\Rightarrow \vec{A} = \rho(2cos^2\theta - sin^2\theta)\overrightarrow{u_\rho} - 3\rho\sin\theta\cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + 5\overrightarrow{u_z}$ (0.5)

4- le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées polaires.

$d\overrightarrow{OM} = d\left(\rho\overrightarrow{u_\rho} + z\overrightarrow{u_z}\right) = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\overrightarrow{u_\rho} + dz\overrightarrow{u_z} + zd\overrightarrow{u_z}$ avec $d\overrightarrow{u_\rho} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}d\theta = \overrightarrow{u_\theta}d\theta$ et $d\overrightarrow{u_z}$=0 car $\overrightarrow{u_z}\overrightarrow{= k}$

onc $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$ (1.5)

5- le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires.

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$ (0.5)

Exercice : 4 (4pts)

a=-kv

K=constante, à t=0, v=v_0 et x=x_0

Nous avons l'accélération, cherchant la vitesse en fonction du temps.

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt$$

Donc $\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_0^t -kdt \Rightarrow lnv - lnv_0 = -kt$

donc $ln\frac{v}{v_0} = -kt$

Alors $\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$ et $v(t)=v_0 e^{-kt}$ (2pts)

Nous avons trouvé la vitesse, cherchant maintenant la position en fonction du temps

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0e^{-kt} \Rightarrow dx = v_0e^{-kt}\,dt$$

Donc $\int_{x_0}^{x}dx = \int_0^t v_0e^{-kt}\,dt \Rightarrow x - x_0 = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

Alors $x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$ (1pt)

Il faut trouver la relation entre la vitesse et la position

Nous avons $\frac{v}{v_0} = e^{-kt}$ et $x = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$ (1pt)

Donc $x = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) = x_0 + \frac{v_0}{k}\left(\frac{v_0 - v}{v_0}\right)$

$x = x_0 + \dfrac{v_0 - v}{k} \Rightarrow v_0 - v = k(x - x_0)$

Alors $v = k(x_0 - x) + v_0$

1- Le vecteur position en coordonnées cylindriques : (0.5 pts) (0.5 pts) (0.5 pts)

Donc (0.5 pts) Ou bien (1) (0.25pts)

Par projection : , et (0.75pts) (01pts)

Par projection (0.75pts)

Z

X

Y

4

(2)

Donc par identification (1) et (2) (0.25pts)

2- vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

(0.5pts)

(0.25pts)

(0.25pts)

(0.5pts)

3- vecteur de déplacement élémentaire : la méthode de différentiation du vecteur unitaire : (0.5pts)

on a (0.5pts)

(0.5pts)