Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Rattrapage du contrôle.
Lundi 17/12/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (05pts) Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \overline{x1}^{10} + \overline{y1}^{3} & = & \overline{11}^{10} \\ \overline{xy}^{3} & = & 3 \end{cases}$$

Exercice 2: (07pts) On considère l'ensemble suivant

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{|1 - x^2|} \geq |2x + 1| \right\}$$

Déterminer, si elles existent, $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 3: (08pts) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{5}{u_n}\right), \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Posons $x_n = \dfrac{u_n - \sqrt{5}}{u_n + \sqrt{5}}$. Montrer que $x_{n+1} = x_n^2$.
3. Proposer ensuite une expression de x_n en fonction de n et x_0, puis montrer-la par récurrence.
4. En déduire la limite de (x_n).
5. Exprimer enfin u_n à l'aide de x_n, puis calculer la limite de (u_n).

$1^{ère}$ année M.I – Semestre 1 – 2018/2019.

Module : "Analyse I" – Corrigé du Rattrapage du Contrôle.

Exercice 1 : (05pts) A résoudre $\begin{cases} \overline{x1}^{10} + \overline{y1}^{3} = \overline{11}^{10} \\ \overline{xy}^{3} = 3 \end{cases}$

Remarquons tout d'abord que les inconnues x et y doivent impérativement vérifier : $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \leq 2$ (car les chiffres en base 3 sont $0, 1, 2$). 2pts

D'après les définitions des écritures dans une base on a :

$$\begin{cases} 10x + 1 + 3y + 1 = 11 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$ 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 3y = 9 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$ 1

Or $y = 3$ est impossible, donc le système n'a pas de solution. 1

Exercice 2 : (07pts) $E = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{|1-x^2|} \geq |2x+1|\}$

L'inégalité définissant E a un sens $\forall x \in \mathbb{R}$, donc son domaine est $\mathbb{R}$. 0,5

Résolvons à présent cet inéquation.

$$\sqrt{|1-x^2|} \geq |2x+1| \Leftrightarrow |1-x^2| \geq (2x+1)^2 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \geq (2x+1)^4$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^4 - (1-x^2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[(2x+1)^2 - (1-x^2)\right]\left[(2x+1)^2 + (1-x^2)\right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 + 4x)(3x^2 + 4x + 2) \leq 0$$ 03,5

$(\Delta' = 4 - 6 = -2)$

x	$-\infty$		$-4/5$		0		$+\infty$
$5x^2+4x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$3x^2+4x+2$		$+$		$+$		$+$	
le produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $\boxed{E = [-4/5, 0]}$ 1,5

Donc $\boxed{\inf E = \min E = -4/5}$ et $\boxed{\sup E = \max E = 0}$ 1,5

Exercice 3 : (08 pts). $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right), \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1°/ (u_n) est bien définie $\forall n$: Comme il y a division par u_n dans la définition de u_{n+1}, il faut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. Par récurrence, $u_0 = 3 \neq 0$. Si on l'a jusqu'à n ($u_n \neq 0$) alors $u_{n+1} = \frac{u_n^2+5}{2u_n} \neq 0$, sinon $u_n^2+5=0$ qui est absurde. Donc $u_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. 1pt

2°/ Posons $x_n = \frac{u_n - \sqrt{5}}{u_n+\sqrt{5}}$. Alors $x_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\sqrt{5}}{u_{n+1}+\sqrt{5}} = \frac{u_n + \frac{5}{u_n} - 2\sqrt{5}}{u_n + \frac{5}{u_n} + 2\sqrt{5}}$

ou encore $x_{n+1} = \frac{u_n^2+5-2u_n\sqrt{5}}{u_n^2+5+2u_n\sqrt{5}} = \frac{(u_n-\sqrt{5})^2}{(u_n+\sqrt{5})^2} = x_n^2$. (cqfd) 2pts

3°/ Expression de x_n : Pour les premiers x_n on a : $x_1 = x_0^2$; $x_2 = x_1^2 = (x_0^2)^2 = x_0^{2^2}$; $x_3 = x_2^2 = \left(x_0^{2^2}\right)^2 = x_0^{2^3}$. On peut proposer $\boxed{x_n = x_0^{2^n}}$. Montrons-la par récurrence. Pour $n=0$ $x_0 = x_0^{2^0} = x_0^1 = x_0$ (vrai). Supposons la démontrée jusqu'à l'ordre n. 2pts

Alors $x_{n+1} = x_n^2 = \left(x_0^{2^n}\right)^2 = x_0^{2 \cdot 2^n} = x_0^{2^{n+1}}$.

4°/ Limite de x_n : Calculons x_0. $x_0 = \frac{u_0-\sqrt{5}}{u_0+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

On remarque facilement que $\boxed{0 < x_0 < 1}$. 1pt

Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_0^{2^n} = 0}$

5°/ Expression de u_n, et limite : On a $x_n(u_n+\sqrt{5}) = u_n - \sqrt{5}$

donc $u_n(x_n - 1) = -x_n\sqrt{5} - \sqrt{5} \Rightarrow \boxed{u_n = \sqrt{5}\,\frac{1+x_n}{1-x_n}}$ 2pts

D'où $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{5}\,\frac{1+x_n}{1-x_n} = \sqrt{5}}$