**Corrigé du contrôle continu de la première année MI 2018/2019**

**Exercice1 (6pts) :**

1- l'expression de la fréquence f :

$$\begin{cases} [\mathbf{f}] = \mathbf{T^{-1}}\ (0.25) \\ [F] = [\mathbf{m}][\mathbf{a}] = \mathbf{MLT^{-2}}(0.25) \\ [\mathbf{L}] = \mathbf{L}\ (0.25) \\ [\,\rho] = \dfrac{[\mathbf{m}]}{[\mathbf{V}]} = \mathbf{ML^{-3}}(0.25) \\ [\mathbf{K}] = \mathbf{1}(0.25) \end{cases}$$

On considère que la formule est homogène

$[\mathbf{f}] = [\mathbf{K}][\mathbf{F}]^{\mathbf{a}}[\mathbf{L}]^{\mathbf{b}}[\boldsymbol{\rho}]^{\mathbf{c}}$ (0.25)

$\mathbf{T^{-1}} = (\mathbf{MLT^{-2}})^{a}(\mathbf{L})^{b}(\mathbf{ML^{-3}})^{c}$ (0.25)

$\mathbf{T^{-1}} = \mathbf{M^{a+c}\,L^{a+b-3c}\,T^{-2a}}$ (0.25)

Par identification, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{a} + c = 0\ (0.25) \\ \mathbf{a + b - 3c = 0}\ \ (0.25) \\ -1 = -2a\ (0.25) \end{cases} \quad \textbf{donc} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(0.25) \\ \mathbf{b = -2} \\ \mathbf{c} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(0.25) \end{cases} (0.25)$$

$\mathbf{f = KF^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{-\frac{1}{2}}}$ Ou bien $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L^2}}\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\boldsymbol{\rho}}}$ (0.5)

2- **L'incertitude relative** $\Delta f/f$ en fonction de $\Delta F$, $\Delta L$ et $\Delta\rho$.

Méthode logarithmique :

$$logf = \frac{1}{2}logF - \frac{1}{2}log\rho - 2logL\ (0.5)$$

$$\frac{df}{f} = \frac{dF}{2F} - \frac{d\rho}{2\rho} - 2\frac{dL}{L}\ \ (0.25)$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta F}{2F}\right| + \left|-\frac{\Delta\rho}{2\rho}\right| + \left|-2\frac{\Delta L}{L}\right| = \frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\ (0.5)$$

3- **L'incertitude absolue** $\Delta f$

$$\Delta f = f\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right) = \mathrm{KF^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right)(0.5)$$

$$\Delta f = K\frac{1}{2}F^{\frac{-1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta F + K\frac{1}{2\rho}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-3}{2}}\Delta\rho + 2KF^{\frac{1}{2}}L^{-3}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta L\ (0.25)$$

**Exercice 2 (8pts) :**

A-Soit les deux vecteurs $\vec{A}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} et\ \vec{B}\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$

1- La somme et l'addition des deux vecteurs

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}\ ;\ \|\vec{A} + \vec{B}\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-7)^2} = \sqrt{75}\qquad (0.5)$$

$\vec{A}-\vec{B}=-3\vec{\imath}-3\vec{\jmath}+3\vec{k}$ ; $\|\vec{A}-\vec{B}\|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{27}$ (0.5)

2- Le produit scalaire

$\vec{A}.\vec{B}=-2+4+10=12$ (0.25)

D'après la deuxième écriture du produit scalaire$\vec{A}.\vec{B}=\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\vec{A},\vec{B})$

$\|\vec{A}\|=\sqrt{6}, \|\vec{B}\|=\sqrt{45}$ donc cos($\vec{A}$,$\vec{B}$)=$\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{A}\|.\|\vec{B}\|}=\frac{12}{\sqrt{6}.\sqrt{45}}$=0.730 (0.25)

alors L'angle θ=($\vec{A}$,$\vec{B}$)=43.08° (0.25)

3- Produit vectoriel

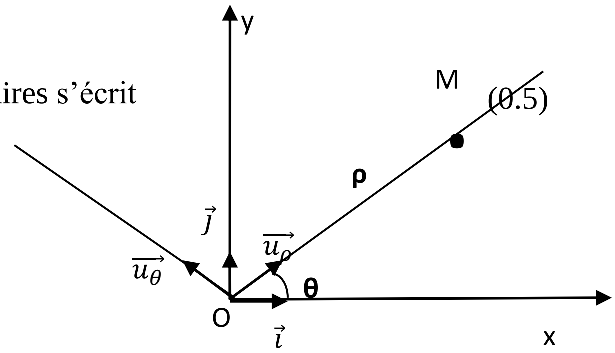
$$\vec{A}\Lambda\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & 4 & -5\end{vmatrix}=3\vec{\imath}-9\vec{\jmath}-6\vec{k} \text{ (0.25)}$$

Le produit vectoriel $\vec{A}\Lambda\vec{B}$donne un vecteur perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{A}\ et\vec{B}$ et le module de ce produit ($\|\vec{A}\Lambda\vec{B}\|$) présente la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{A}\ et\vec{B}$ (0.25)

B- Les coordonnées polaires sont ρ et θ ; avec $\rho=\|\overrightarrow{OM}\|$ ; 0<ρ<R et l'angle $\theta=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ avec 0<θ<2□.

1- Le vecteur $\overrightarrow{OM}$en coordonnées polaires s'écrit (0.5)

comme suit :$\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u_\rho}$ (0.5)



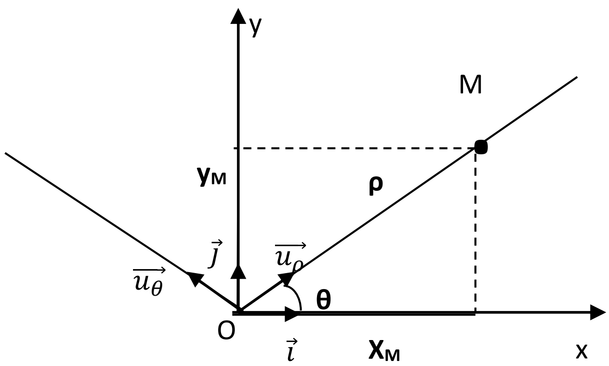

2- les relations de passage entre les coordonnées polaires et cartésiennes.

$$\begin{cases} sos\theta=\frac{x_M}{\rho}\\ Sin\theta=\frac{y_M}{\rho}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_M=\rho cos\theta\\ y_M=\rho sin\theta\end{cases} \text{ (0.5)}$$

Donc le vecteur $\overrightarrow{OM}$en coordonnées

cartésiennes s'écrit $\overrightarrow{OM}=x_M\vec{\imath}+y_M\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{OM}=\rho(cos\theta\vec{\imath}+sin\theta\vec{\jmath})$




On avait :$\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u_\rho}$ (en coordonnées polaires)

Par identification $\overrightarrow{u_\rho}$= $cos\theta\vec{\imath}+sin\theta\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{u_\theta}=\frac{d\,\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}=-sin\theta\vec{\imath}+cos\theta\vec{\jmath}$ (0.5)

3- l'écriture du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ en coordonnées polaires

Nous avons $\begin{cases} x_M = \rho cos\theta \\ y_M = \rho sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$

En utilisant le tableau de passage (0.5)

| | $\overrightarrow{u_\rho}$ | $\overrightarrow{u_\theta}$ |
|---|---|---|
| $\vec{\imath}$ | Cosθ | -sin θ |
| $\vec{\jmath}$ | Sinθ | cosθ |

Donc $\vec{\imath} = \cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\vec{\jmath} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$ (0.25)

Le vecteur $\vec{A}$ s'écrit alors $\vec{A} = 2\rho cos\theta\left(\cos\theta\,\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right) + \rho sin\theta\left(\sin\theta\,\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$

$\Rightarrow \vec{A} = \rho(1 + cos^2\theta)\overrightarrow{u_\rho} - \rho\sin\theta\cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$ (0.5)

4- le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées polaires.

$d\overrightarrow{OM} = d\left(\rho\overrightarrow{u_\rho}\right) = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\overrightarrow{u_\rho}$ avec $d\overrightarrow{u_\rho} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}d\theta = \overrightarrow{u_\theta}d\theta$ (0.25)

Donc $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta}$ (0.5)

5- le vecteur vitesse et le vecteur accélération en coordonnées polaires.

Le vecteur vitesse en coordonnées polaires : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$ (0.5)

Le vecteur accélération en coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

avec $\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\rho}$ (0.25)

donc $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\overrightarrow{u_\rho} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} - \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\rho}$

$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d^2\rho}{dt^2}\overrightarrow{u_\rho} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{u_\theta} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\overrightarrow{u_\rho}$ (0.5)

6- L'expression de la surface élémentaire dans le repère polaire :

$ds = dl_1.dl_2$ et $d\overrightarrow{OM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} = dl_1\overrightarrow{u_\rho} + dl_2\overrightarrow{u_\theta}$

Avec $dl_1$est la variation de ρ suivant $\overrightarrow{u_\rho}$ qui est $d\rho$ et $dl_2$ est la variation de θ suivant $\overrightarrow{u_\theta}$

$$ds = d\rho.\rho d\theta (0.25)$$

La surface d'un disque de rayon R.

S=$\iint d\rho.\rho d\theta = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} 2\pi = \pi R^2$ (0.5)

**Exercice 3: ( 6pts)**

1- **les composantes de la vitesse et son module**

Nous avons x(t) =2t+1 et y = $x^2$ donc y(t)= $(2t+1)^2$=$4t^2$+4t+1

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (0.5) \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2 \\ v_y = 8t + 4 \end{cases} \quad (0.5)$$

Le module de la vitesse :

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{4 + (8t+4)^2} = \sqrt{4 + 64t^2 + 64t + 16} = \sqrt{64t^2 + 64t + 20} \quad (0.25)$$

2- **les composantes de l'accélération et son module**

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (0.5) \quad \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 8 \end{cases} \quad (0.5)$$

$\vec{a} = 8\vec{j}$donc$|\vec{a}| = a = 8$ (0.25)

3- **La nature du mouvement**

$\vec{a}.\vec{v} = 64t + 32 > 0$ (0.25) donc le mouvement est uniformément accéléré. (0.25)

4- **les accélérations normale et tangentielle**

- **L'accélération tangentielle**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d\left(\sqrt{64t^2+64t+20}\right)}{dt} = \frac{64t+32}{\sqrt{64t^2+64t+20}} = \frac{64t+32}{v} \quad (1)$$

- **L'accélération normale**

Nous avons $a^2 = a_T^2 + a_N^2$ donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$ (0.5)

$$a_N^2 = 64 - \frac{(32t+16)^2}{16t^2+16t+5} \Rightarrow a_N^2 = \frac{256}{v^2} \Rightarrow a_N = \frac{16}{v} \quad (0.5)$$

5- **Le rayon de courbure**

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{16} \quad (1)$$