Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2018/2019.

Première année M.I - Semestre 1.
Module : *Analyse 1* - Epreuve de contrôle.
Jeudi 15/11/2018 - Durée : 01h30mn.
Les calculatrices et téléphones portables sont strictement interdits.

Exercice 1: (05pts) On donne le nombre entier $A = 15$, écrit en base 10.

1. Ecrire A en base 2.
2. En déduire, sans faire de nouvelles décompositions, l'écriture de A dans la base 4, puis dans la base 8.

Exercice 2: (07pts) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation

$$|x+2| + |x+3| \leq 5$$

Notons S l'ensemble des solutions. Déterminer, si elles existent, $\sup S$ et $\inf S$.

Exercice 3: (08pts) On considère la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+u_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n \leq 2.$
2. Montrer, par récurrence aussi, que $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq u_{n+1}.$
3. En déduire que cette suite converge, puis calculer sa limite.

1ère année M.I - Semestre 1 - 2018/2019.

Module : « Analyse I » - Corrigé du Contrôle continu.

Exercice 1 : (05 pts) $A = 15$ (en base 10)

1°/ Ecriture de A en base 2 :

$$\begin{array}{l|l} 15 & 2 \\ \boxed{1} & 7 \;|\; 2 \\ & \boxed{1} \;\; 3 \;|\; 2 \\ & \quad\;\; \boxed{1} \;\; \boxed{1} \end{array}$$

2pts

$$\boxed{A = \overline{1111}^{2}}$$

2°/ Ecriture de A en base 4, puis 8 :

* On a $A = 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ 1,5 pt

$= 2\cdot4 + 4 + 2 + 1 = 3\cdot4 + 3$

donc $\boxed{A = \overline{33}^{4}}$ 1,5 pt

* On a aussi $A = 8 + 7 \Longrightarrow \boxed{A = \overline{17}^{8}}$

Exercice 2 : (07 pts) A résoudre dans $\mathbb{R}$: $|x+2| + |x+3| \leq 5$.

On a $|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$

et $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{si } x \leq -3 \end{cases}$

donc

x	-3	-2	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$-x-2$	$x+2$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\lvert x+2\rvert+\lvert x+3\rvert \leq 5$	$-2x-5 \leq 5$	$1 \leq 5$	$2x+5 \leq 5$

1

* si $x \in]-\infty, -3]$: on résout $-2x-5 \leq 5 \Rightarrow -2x \leq 10 \Rightarrow x \geq -5$ 1,5

$\Rightarrow S_1 = [-5, -3]$

* si $x \in [-3, -2]$: l'inégalité devient $1 \leq 5$ qui est vraie, donc $S_2 = [-3, -2]$ 1,5

* si $x \in [-2, +\infty[$: on résoud $2x+5 \leq 5 \Rightarrow 2x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$ 1,5

$\Rightarrow S_3 = [-2, 0]$

Donc $\boxed{S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [-5, 0]}$ 0,5

$(x \in S \Longleftrightarrow -5 \leq x \leq 0)$

On voit que -5 est un minorant de S, et $-5 \in S$ donc

$$\boxed{\inf S = \min S = -5}$$ 0,5

On voit aussi que 0 est un majorant de S et $0 \in S$ donc

$$\boxed{\sup S = \max S = 0}$$ 0,5

Exercice 3 : (08 pts)
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+u_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1°/ On peut faire séparément $u_n \geq 0$ et $u_n \leq 2$.

. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Pour $n=0$, $u_0 = 0 \geq 0$. 1,5

Supposons que $u_n \geq 0$, alors $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{1+u_n} = \dfrac{1+2u_n}{1+u_n}$,

cette fraction est positive car $1+2u_n \geq 0$ et $1+u_n \geq 0$, puisque $u_n \geq 0$.

. D'autre part, pour $n=0$, $u_0 = 0 \leq 2$. Supposons que $u_n \leq 2$.

donc $1+u_n \leq 3 \Rightarrow \dfrac{1}{1+u_n} \geq \dfrac{1}{3}$ (car $1+u_n > 0$). 1,5

$$\Rightarrow -\frac{1}{1+u_n} \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow \underbrace{2 - \frac{1}{1+u_n}}_{u_{n+1}} \leq 2 - \frac{1}{3} \leq 2.$$

2°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

Pour $n=0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 2 - \dfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow u_0 \leq u_1$.

Maintenant si $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow 1+u_n \leq 1+u_{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+u_n} \geq \frac{1}{1+u_{n+1}} \quad (\text{car les } u_n \geq 0)$$ 2pts

$$\Rightarrow \frac{-1}{1+u_n} \leq \frac{-1}{1+u_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{2 - \frac{1}{1+u_n}}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{2 - \frac{1}{1+u_{n+1}}}_{u_{n+2}} \quad \text{(cqfd)}$$

3°/ Comme (u_n) est croissante et majorée (par 2) alors elle converge. Sa limite vérifie : $l = 2 - \dfrac{1}{1+l} \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+l} = 2 - l \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0$ 1,5

$\Delta = 1+4 = 5 \Rightarrow l_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $l_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 1,5

donc $\boxed{l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.