Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018-2019

Date : Jeudi 29/11/2018

1ère Année LMD MI

Durée : 01H30.

Corrigé du Contrôle continu : Algèbre 1

Exercice 1 : (06 points)

Dans une promo à l'université de Tlemcen, il n'y a que deux étudiants Mohamed et Selma qui vont passer le rattrapage des trois matières suivantes : Algèbre, Analyse et Informatique. Les résultats des étudiants sont donnés dans le tableau suivant :

	Algèbre	Analyse	Informatique
Mohamed	12	5	16
Selma	14	15	7

Soit $E = \{Mohamed, Selma\}$ l'ensemble des étudiants.
Notons par $F = \{Algèbre, Analyse, Informatique\}$ l'ensemble des matières.
Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression :

" l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y ".

Dire en justifiant si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$,
2. $\exists x \in E, \exists y \in F : P(x, y)$,
3. $\exists x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$,
4. $\forall y \in F, \exists x \in E : P(x, y)$.
5. $\exists y \in F, \forall x \in E : \overline{P(x, y)}$.
6. $\exists y \in F, \forall x \in E : P(x, y)$.

Solution :

1. $\forall x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$, est fausse $\boxed{0.5pt}$ car Mohamed n'a pas la moyenne en Analyse. $\boxed{0.5pt}$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F : P(x, y)$, est vraie $\boxed{0.5pt}$ car Selma a la moyenne en Algèbre. $\boxed{0.5pt}$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F : P(x, y)$, est fausse $\boxed{0.5pt}$ car pour les deux étudiants il existe une matière où ils n'ont pas la moyenne. $\boxed{0.5pt}$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E : P(x, y)$, est vraie $\boxed{0.5pt}$ car d'après le tableau dans toute les matières il existe un étudiant qui a la moyenne. $\boxed{0.5pt}$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E : \overline{P(x, y)}$, est fausse $\boxed{0.5pt}$ car y'a pas une matière où tout les étudiants n'ont pas la moyenne. $\boxed{0.5pt}$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E : P(x, y)$, est vraie $\boxed{0.5pt}$ car en Algèbre Mohamed et Selma ont la moyenne. $\boxed{0.5pt}$

Exercice 2 : (06 points)

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer par l'absurde que si $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a+b\sqrt{2}=0$, alors $a=b=0$.

2. En déduire que si $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, alors

$$\left(m+n\sqrt{2}=p+q\sqrt{2}\right) \Rightarrow \left(m=p \text{ et } n=q\right).$$

Solution :

1. Par l'absurde : Supposons que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$: $a+b\sqrt{2}=0$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ et $(a \neq 0 \vee b \neq 0)$ $\boxed{0.5\text{pt}}$.

– Si $b \neq 0$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ alors

$$a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow \sqrt{2}=-\frac{a}{b}, \boxed{0.5\text{pt}}$$

contradiction avec l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. $\boxed{0.5\text{pt}}$

– Si $a \neq 0$, et $b=0$ on trouvera $a=0$ contradiction car a est supposé nul. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. Pour $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\left(m+n\sqrt{2}=p+q\sqrt{2}\right) \Rightarrow (m-p)+(n-q)\sqrt{2}=0. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Puisque $m-p \in \mathbb{Z}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$, $n-q \in \mathbb{Z}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$ et en utilisant la question 1 $\boxed{0.5\text{pt}}$, on obtient

$$\left(m-p=n-q=0\right) \boxed{0.5\text{pt}} \Rightarrow \left(m=p \text{ et } n=q\right). \boxed{0.5\text{pt}}$$

Exercice 3 : (08 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2+x=0$.

2. Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2+x-y=0$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x)=x(1-x)$.

a. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f.

b. Soit $g : [\frac{1}{2}, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x)=f(x)$. Montrer que g est injective.

4. Montrer que $g : [\frac{1}{2}; \infty[\to]-\infty; \frac{1}{4}]$ définie par $g(x)=f(x)$ est bijective.

Solution :

1. $-x^2 + x = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow \big(x = 0 \vee x = 1\big) \Rightarrow S = \{0, 1\}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

2. $-x^2 + x - y = 0$: une équation du second ordre. Calculons son discréminant : $\Delta = 1 - 4(-1)(-y) = 1 - 4y$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

– Si $y > \frac{1}{4}$, $\Delta < 0$ donc y'a pas de solutions dans $\mathbb{R} \Rightarrow S = \emptyset$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

– Si $y = \frac{1}{4}$, $\Delta = 0$ donc racine double $x = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \big\{\frac{1}{2}\big\}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

– Si $y < \frac{1}{4}$, $\Delta > 0$ donc deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1-4y}}{-2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1-4y}}{-2}.$$

$$\Rightarrow S = \Big\{\frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}\Big\}. \boxed{0.5\text{pt}}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1-x)$.

a. D'après la question 1, $f(0) = f(1)$ mais $1 \neq 0$ donc f n'est pas injective. $\boxed{0.5\text{pt}}$ Concernant la surjectivité, et d'après la question 2, on peut voir que pour $y > \frac{1}{4}$ l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solutions i.e pour un tel y il n'y a pas d'antécédents donc f n'est pas surjective. $\boxed{0.5\text{pt}}$

b. Soit $g : \big[\frac{1}{2}, +\infty\big[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$. Montrer que g est injective.

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in \Big[\frac{1}{2}, +\infty\Big[: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \boxed{0.5\text{pt}}$$

Soient x_1 et x_2 dans $\big[\frac{1}{2}, +\infty\big[$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1(1 - x_1) = x_2(1 - x_2).$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = x_1^2 - x_2^2.$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2).$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0. \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)[1 - x_1 - x_2] = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2 = 0) \vee (1 - x_1 - x_2 = 0). \boxed{0.5\text{pt}}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 + x_2 = 1.$$

$x_1 + x_2 = 1$ est exclu $\boxed{0.5\text{pt}}$ car $x_2 = 1 - x_1 \leqslant \frac{1}{2}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$ Donc $x_1 = x_2$ et par conséquent f est injective.

4. Soit $g : [\frac{1}{2}; \infty[\to]-\infty; \frac{1}{4}]$ définie par $g(x) = f(x)$.

D'après la question 2, l'equation $y = f(x)$ admet au moins une solution si $y \leqslant \frac{1}{4}$. $\boxed{0.5\text{pt}}$

Pour que g soit bijective, il faut une et une seule solution de l'équation $y = g(x)$ puisque $g(x) = f(x)$.

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4y}}{2}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4y}}{2}.$$

On peut vérifier que $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{1-4y} - 1}{2} \geqslant 0 \Rightarrow x_2 \geqslant \frac{1}{2}$, $\boxed{0.5\text{pt}}$ et que $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{1-4y} - 1}{2} \leqslant 0 \Rightarrow x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ $\boxed{0.5\text{pt}}$. Ce dernier est exclu $\boxed{0.5\text{pt}}$ car il n'est pas dans $[\frac{1}{2}; \infty[$. Donc g est bijective.