Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence – S6 — Juin 2018

Equations aux Dérivées Partielles — Examen de Rattrapage — 1H45

***Exercice 1(5pts)**: Soit Ω un domaine borné non vide de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.*

1. *Soit $v \in C^2(\Omega)$ une fonction sous-harmonique i.e. $-\Delta v \leq 0$ dans Ω.*

   Montrer que

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} v(y)\, dy, \qquad \forall B(x,r) \subset \Omega,$$

où ω_n désigne la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $B(x,r)$ est la boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$.

2. *Soient $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 et u une fonction harmonique dans Ω. On pose $v = f(u)$.*
   Montrer que v est sous-harmonique dans Ω.

***Exercice 2(8pts)**: On considère le problème d'inconnue $u(x,t)$ suivant:*

$$(\mathcal{H}) \begin{cases} u_{xx} - u_t = e^{-x}; & 0 < x < L, \ \ t > 0, \\ u(0,t) = 0 = u(L,t); & t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x} - 1; & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

1. *Déterminer une fonction $u_p(x)$ indépendante de t solution de $(\mathcal{H})$.*
2. *On pose $v(x,t) = u(x,t) - u_p(x)$.*
   Montrer que $v(x,t)$ est alors solution du problème auxiliaire suivant:

$$(\mathcal{H}_p) \begin{cases} v_{xx} = v_t; & 0 < x < L, \\ v(0,t) = 0 = v(L,t); & t > 0, \\ v(x,0) = (e^{-L} - 1)\dfrac{x}{L}; & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

3. *Résoudre le problème $(\mathcal{H}_p)$ et en déduire $u(x,t)$ solution de $(\mathcal{H})$.*

***Exercice 3(7pts)**:*

1. *Résoudre le problème suivant :*

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} v_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t); \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = e^x, \ v_t(x,0) = 0; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. *Soit u la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W}) \begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t); \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = h(x); x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où h est une fonction continue et $c > 0$.

a. Montrer que la fonction $v := u_t$ est solution du problème

$$(S) \begin{cases} v_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t); \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = h(x), \ v_t(x,0) = 0; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

b. En déduire la solution u du problème $(\mathcal{W})$ pour $h(x) = e^x$.

Bon courage

Corrigé

Exercice 1(5pts): *Soit* Ω *un domaine borné non vide de* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$.

1. **(2 pts)** *Soit* $v \in C^2(\Omega)$ *une fonction sous-harmonique i.e.* $-\Delta v \leq 0$ *dans* Ω.

   Montrons que

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} v(y)\, dy, \qquad \forall B(x,r) \subset \Omega,$$

(ω_n *mesure de la boule unité de* $\mathbb{R}^n$, $B(x,r)$ *boule fermée de centre* x *et de rayon* $r > 0$.*)*

Nous partons de l'égalité

$$v(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\operatorname{mes}(\partial B(x,t))} \int_{\partial B(x,t)} v(y)\, ds(y), \qquad \forall x \in \Omega.$$

Fixons alors $r > 0$ *et* $x \in \Omega$ *tels que* $B(x,r) \subset \Omega$ *et posons*

$$f(t) = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} v(y)\, ds(y), \quad 0 < t < r.$$

En posant $y = x + tz$, *nous obtenons*

$$f(t) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} v(x+tz)\, ds(z).$$

Dérivons par rapport à t,

$$f'(t) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} \nabla v(x+tz).z\, ds(z) = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} \nabla v(y).\frac{y-x}{t} ds(y)$$

$$f'(t) = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} \frac{\partial v(y)}{\partial \eta} ds(y),$$

où $\eta := \frac{y-x}{t}$, *est la normale unitaire en* y *dirigée vers l'extérieur de* $B(x,t)$.
En utilisant la formule de Green, nous écrivons

$$f'(t) = \frac{1}{n\omega_n t^{n-1}} \int_{B(x,t)} \Delta v(y)\, dy,$$

mais comme v est sous-harmonique, c.-à-d. $\Delta v \geq 0$ *alors* $f'(t) \geq 0$,
et f est donc croissante sur $]0, r[$.
Par suite, $\lim_{t\to 0} f(t) \leq f(\rho)$, $(r > \rho > t > 0)$ *d'où*

$$v(x) \leq \frac{1}{n\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(x,\rho)} v(y)\, ds(y)$$

ce qui implique que

$$n\rho^{n-1} v(x) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x,\rho)} v(y)\, ds(y).$$

D'où

$$\int_0^r n\rho^{n-1}v(x)d\rho \leq \frac{1}{\omega_n}\int_0^r\left(\int_{\partial B(x,\rho)} v(y)\,ds(y)\right)d\rho$$

et donc

$$r^n v(x) \leq \frac{1}{\omega_n}\int_{B(x,r)} v(y)\,ds(y).$$

D'où finalement

$$v(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^n}\int_{B(x,r)} v(y)\,dy = \frac{1}{\mathrm{mes}\big(B(x,r)\big)}\int_{B(x,r)} v(y)\,dy, \qquad \forall B(x,r)\subset\Omega.$$

2. **(3 pts)** $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *convexe de classe* C^2 *et* u *harmonique dans* Ω.
   On pose $v = f(u)$.
   Montrons que v *est sous-harmonique dans* Ω.
   Il nous suffit de calculer Δv.
   On a

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}f'(u) \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}f'(u) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 f''(u).$$

   D'où

$$\Delta v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}f'(u) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 f''(u)\right) = f'(u)\Delta u + f''(u)|\nabla u|^2.$$

   Comme u *est harmonique* $(\Delta u = 0)$ *et* f *est convexe de classe* C^2 $(f'' \geq 0)$ *alors* $\Delta v \geq 0$ *et par suite* v *est sous-harmonique.*

***Exercice 2(8pts)**: Soit le problème d'inconnue* $u(x,t)$ *suivant:*

$$(\mathcal{H})\begin{cases} u_{xx} - u_t = e^{-x}; & 0 < x < L,\ t > 0,\\ u(0,t) = 0 = u(L,t); & t > 0,\\ u(x,0) = e^{-x} - 1; & 0 \leq x \leq L.\end{cases}$$

1. **(2 pts)** *Déterminons une fonction* $u_p(x)$ *indépendante de* t *solution de* $(\mathcal{H})$.
   Comme u_p *est indépendante de* t *alors* $\left(u_p\right)_t = 0$.
   En portant dans l'équation nous obtenons, $u_p''(x) = e^{-x}$, *d'où*

$$u_p(x) = e^{-x} + ax + b.$$

   u_p *vérifie les conditions aux limites,* $u_p(0) = 0 = u_p(L)$, *ce qui donne*

$$b = -1, \ \text{ et } \ a = \frac{1-e^{-L}}{L},$$

   et finalement

$$u_p(x) = e^{-x} + (1-e^{-L})\frac{x}{L} - 1.$$

2. **(2 pts)** *On pose* $v(x,t) = u(x,t) - u_p(x)$,
où $u(x,t)$ *est solution de* $(\mathcal{H})$. *Montrons que* $v(x,t)$ *est solution du problème,*

$$(\mathcal{H}_p)\begin{cases} v_{xx} = v_t; & 0 < x < L, \\ v(0,t) = 0 = v(L,t); & t > 0, \\ v(x,0) = (e^{-L} - 1)\dfrac{x}{L}; & 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

On a, $v_{xx} = u_{xx} - u_p'' = (u_t + e^{-x}) - e^{-x} = u_t - (u_p)_t = v_t$, *car* $(u_p)_t = 0$.

$v(0,t) = u(0,t) - u_p(0) = 0$, $\quad v(L,t) = u(L,t) - u_p(L) = 0$, *et*

$v(x,0) = u(x,0) - u_p(x) = (e^{-x} - 1) - \left(e^{-x} + (1 - e^{-L})\dfrac{x}{L} - 1\right) = (e^{-L} - 1)\dfrac{x}{L}$.

Ainsi $v(x,t)$ *est bien une solution du problème* $(\mathcal{H}_p)$.

3. *Résolvons le problème* $(\mathcal{H}_p)$.

On procède par la méthode de séparation des variables, posons $v(x,t) = X(x)T(t)$.

En portant dans l'équation, on obtient

$$XT' = X''T \quad d'\text{où} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}.$$

Les variables x et t sont indépendantes on écrit alors

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{T}, \quad \lambda \text{ cste réelle.}$$

D'où $X'' - \lambda X = 0$, *et* $T' - \lambda T = 0$.

Résolvons l'équation en x: *Si* $\lambda \geq 0$, *on obtient la solution triviale.*

Pour $\lambda < 0$, *disons* $\lambda = -\alpha^2$, $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$, *alors* $X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$.

On a $X(0) = 0$ *d'où* $A = 0$, *et* $X(L) = 0$ *implique* $B = 0$ *ou* $\sin(\alpha L) = 0$.

Nous cherchons les solutions non triviales écartons alors l'éventualité $B = 0$.

$$\sin(\alpha L) = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous obtenons la famille de solutions: $X_n(x) = B_n \sin(n\pi L^{-1}x)$. **(1 pt)**

Résolvons l'équation en t, *pour* $\lambda = -\alpha^2 = -(n\pi L^{-1})^2$.

Un simple calcul donne la famille de solutions suivante : $T_n(t) = D_n e^{-n^2\pi^2L^{-2}t}$. **(1 pt)**

Une famille de solutions de l'équation de départ est :

$$v_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2L^{-2}t}\sin(n\pi L^{-1}x), \qquad (\text{où } C_n = B_nD_n)$$

Par le principe de superposition on obtient la solution de $(\mathcal{H}_p)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

De la condition initiale on a

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = (e^{-L}-1)\frac{x}{L},$$

et par suite

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L (e^{-L}-1)\frac{x}{L}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\,, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Une intégration par parties nous donne $(\mathbf{1\ pt})$

$$C_n = \frac{2(e^{-L}-1)}{L^2}\left(\left[-\frac{L}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L + \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right) = \frac{2(-1)^n}{n\pi}(1-e^{-L}).$$

Et par suite

$$v(x,t) = (1-e^{-L})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Finalement la solution du problème initial $(\mathcal{H})$ *est* $(\mathbf{1\ pt})$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_p(x) + v(x,t) \\ &= e^{-x} + (1-e^{-L})\frac{x}{L} - 1 + (1-e^{-L})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned}$$

***Exercice 3(7pts)*:**

1. *Résolvons le problème suivant :*

$$(\mathcal{P})\begin{cases} v_{tt}(x,t) = c^2v_{xx}(x,t);\ \ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = e^x,\ v_t(x,0) = 0; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Par la formule de D'Alembert $(\mathbf{0{,}5\ pt})$ *, nous avons*

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\big(v(x+ct,0) + v(x-ct,0)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_t(y,0)dy = \frac{1}{2}(e^{x+ct}+e^{x-ct})$$

$$v(x,t) = e^x\cosh(ct).\ (\mathbf{2\ pts})$$

2. *Soit u la solution du problème suivant :*

$$(\mathcal{W})\begin{cases} u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t); & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = h(x); x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

h est une fonction continue et $c > 0$.

a. *Montrons que la fonction $v := u_t$ est solution du problème* **(2,5 *pts*)**

$$(S)\begin{cases} v_{tt}(x,t) = c^2 v_{xx}(x,t); & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ v(x,0) = h(x),\ v_t(x,0) = 0; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On a $v_t = u_{tt} = c^2 u_{xx}$ *d'où*

$$v_{tt} = c^2 \frac{\partial u_{xx}}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c^2 v_{xx}.$$

$v(x,0) = u_t(x,0) = h(x)$, *et* $v_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = \frac{\partial h(x)}{\partial t} = 0$, *(car h ne dépend pas de t !)* *Ainsi $v := u_t$ est solution du problème (S).*

b. *Pour $h(x) = e^x$ le problème (S) n'est autre que le problème (P), déjà résolu :*

$$v(x,t) = e^x \cosh(ct).$$

D'où $u_t(x,t) = e^x \cosh(ct)$, *et par suite la solution du problème $(\mathcal{W})$ est*

$$u(x,t) = \int_0^t e^x \cosh(c\tau) d\tau = \frac{1}{c} e^x \sinh(ct)\,.$$ **(2 *pts*)**