Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
Module :Transformations Intégrales dans Lp

Examen Final
Dimanche 20 Mai 2018
Durée : 02 heures

0.1 Exercice1 (07 pts).

1. Soit l'équation
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0 \qquad ((E))$$
avec les conditions au bord
$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ y(l,t) &= a, \quad t > 0 \end{aligned}$$
et les conditions initiales
$$\begin{aligned} y(x,0) &= 0, \quad 0 < x < l \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) &= 0, \quad 0 < x < l. \end{aligned}$$
Résoudre (E) en utilisant la transformée de Laplace.

0.2 Solution :

Appliquons la transformée de Laplace à (E) nous obtenons
$$\frac{d^2Y(x,s)}{dx^2} - s^2Y(x,s) = 0 \qquad (\mathbf{2pt})$$

La solution est donnée par

$$Y(x,s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx \qquad \textbf{(1p)}$$

(remarquons que nous pouvons écrire la solution avec e^{sx})

La condition au limite en en $x = 0$ donne $Y(0,s) = c_1 = 0$ et $Y(x,s) = c_2 \sinh sx$.La condition en $x = l$ donne

$$Y(l,s) = \frac{a}{s} = c_2 \sinh sl$$

et

$$c_2 = \frac{a}{s \sinh sl}$$

$$Y(x,s) = \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} \quad \textbf{(1pt)}$$

qui admet les pôles simples suivants

$$s_n = \frac{n\pi i}{l} \text{ pour n=0, } \pm 1, \pm 2, ...$$

pour calculer la transformation inverse, on doit calculer les résidus :

$$\operatorname{Re} s(0) = \lim{}_{s\to 0} s e^{rs} \frac{a \sinh sx}{s \sinh sl} = \frac{ax}{l} \qquad \textbf{(1pt)}$$

d'une manière similaire

$$\operatorname{Re} s(\frac{n\pi i}{l}) = \frac{a}{n\pi} (-1)^n e^{\frac{n\pi i t}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (\textbf{1pt})$$

Finalement , la solution est

$$y(x,t) = \sum \operatorname{Re} s = \frac{ax}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi t}{l} \quad (\textbf{1pt})$$

0.3 Exercice 2 (07 pts).

Soit $u(t,x)$ une fonction telle que

$$i)\ x \ \to \ u(t,x) \text{ est de classe } C^1$$
$$ii)\ u \text{ est intégrable sur } R$$
$$iii) \frac{\partial u}{\partial x} \text{ est intégrable sur } R.$$

a) Montrer que

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(t) = it\widehat{(u)}(t)$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

b) Résoudre le problème

$$\begin{cases} u''(x) - xu(x) = 0 \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

0.4 Solution :

a) La fonction u vérifie

$$u(x,t) = u(0,t) + \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(t,s)ds$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ est intégrable sur R, alors

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^x \frac{\partial u}{\partial x}(t,s)ds$$

existe, et par conséquent

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t)$$

existe.Comme u est intégrable, alors cette limite est nulle, i.e

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 \qquad \textbf{(02 pts)}$$

Calculons $\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(t)$ par intégration par parties, nous aurons

$$\widehat{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(t) = \left[ue^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} + it\widehat{(u)}(t) \qquad \textbf{(02pts)}$$

or d'aprés le raisonnement précedent

$$\left[ue^{-ixt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

d'où le résultat.

b) Appliquons la transformée de Fourier à l'équation, nous obtenons

$$-t^2\widehat{(u)} - i\frac{d}{dt}\widehat{(u)} = 0 \qquad \textbf{(01 pts)}$$

la solution de cette équation différentielle est donnée par

$$\widehat{(u)}(t) = Ce^{i\frac{t^3}{3}} \quad \textbf{(01 pt)}$$

ainsi

$$u(x) = \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{(u)}(t)e^{ixt}dt \quad \textbf{(01 pt)}$$

Il est impossible d'expliciter d'avantage $u(x)$.

0.5 Exercice 3 (06 pts)

a) Etablir l'égalité de Parseval directement (sans passer ni par la fonction de Dirac , ni par le principe de dualité)

b) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin^2(t)}{t^2}\right| dt = \pi$$

0.6 Solution :

a)

$$\begin{aligned}\int_R f(x)\overline{f(x)}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_R f(x)\overline{\left(\frac{1}{2\pi}\int_R \widehat{f}(t)e^{ixt}dt\right)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_R \overline{\widehat{f}(t)}\left(\frac{1}{2\pi}\int_R f(x)e^{-ixt}dx\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_R \overline{\widehat{f}(t)}\widehat{f(t)}dt \quad \textbf{(03 pts)}\end{aligned}$$

b) Il suffit d'appliquer l'égalité de Parseval avec

$$\widehat{f(t)} = \frac{\sin(t)}{t}. \quad \textbf{(03 pts)}$$