Université de Tlemcen
Département de Mathématique le 22-05-2018

Examen final de "Introduction aux Processus Stochastiques"
Durée 1h 30 mn

Exercice .1. *Soit* $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *un échantillon de la loi définie par :*

$$P(X_1 = k) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}}\theta^k \ , \ k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \ , \ \theta \in]0,1[.$$

1. Trouver la fonction génératrice de X_1 *et en déduire* $\mathbf{E}X_1$.
2. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ *de* θ *est solution d'une équation de type* $g(\widehat{\theta}_n) = \overline{X}_n$ *où* g *est à déterminer.*
3. Vérifier que $g(\widehat{\theta}_n)$ *est un estimateur sans biais de* $g(\theta)$.

Exercice .2. *Soit* X, Y *deux variables aléatoires indépendantes de loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
1. Calculer la loi de la variable $\frac{X}{Y}$.
2. En déduire la loi de la variable aléatoire Z^{-1} *si* Z *est une variable aléatoire de loi de Cauchy.*
Indication : la densité d'une variable aléatoire de loi de Cauchy de paramètre $a > 0$ *est définie par :*

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2 + a^2}$$

.

Exercice .3. *On considère le modèle d'échantillonnage* $X_1, X_2, ..., X_n$ *de taille n associé à la famille de lois exponentielles* $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}(\lambda); \lambda > 0\}$. *On veut estimer le paramètre inconnu* $\theta = \lambda$.
1. A partir de la méthode des moments, construire un estimateur convergent $\widehat{\theta}_n$ *de* θ. *Justifier la convergence de cet estimateur.*
2. Vérifier qu'il s'agit de l'estimateur du maximum de vraisemblance.
3. Montrer que la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_i$ *est une loi gamma de fonction de densité :*

$$\frac{\lambda^n}{(n-1)!}s^{n-1}\exp -\lambda s$$

4. Calculer $E_\theta(\widehat{\theta}_n)$. *L'estimateur est-il sans biais ? Déduire un estimateur* $\widetilde{\theta}_n$ *sans biais de* θ.

5. Déterminer selon les valeurs de c un estimateur $\tilde{\tilde{\theta}}_n$ *qui minimise le risque quadratique* $\mathcal{R}(\theta_n^\star(c), \theta)$ *parmi les estimateurs*

$$\theta_n^\star(c) = \frac{c}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \quad c = c(n) > 0.$$

Indication : Les fonctions caractéristique d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ *respectivement de loi gamma* $\Gamma(\lambda, k)$ *est* $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$, *respectivement* $\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^k$.

Bon courage.

Exercice 1 : 1) $M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{9} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{9} e^{tx} \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}} \theta^x$

$$M_X(t) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}} \frac{1 - e^{10t}\theta^{10}}{1-e^t\theta}$$

$$M'_X(t) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}} \cdot \frac{-10\theta^{10}e^{10t}(1-\theta e^t) + \theta e^t(1-\theta^{10}e^{10t})}{(1-\theta e^t)^2}$$

alors $EX = M'_X(0) = \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}} \cdot \frac{-10\theta^{10}(1-\theta) + \theta(1-\theta^{10})}{(1-\theta)^2}$

$$EX = \frac{9\theta^{11} - 10\theta^{10} + \theta}{(1-\theta^{10})(1-\theta)}$$

2) La densité de l'échantillon : $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\theta}{1-\theta^{10}} \theta^{x_i} = \left(\frac{1-\theta}{1-\theta^{10}}\right)^n \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

La vraisemblance :

$$V(\theta, X) = \frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta^{10})^n} \theta^{S_1} \quad \text{où} \quad S_1 = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

La log-vraisemblance :

$$L(\theta, X) = \ln V(\theta, X) = n \ln(1-\theta) - n \ln(1-\theta^{10}) + S_1 \ln\theta$$

Les points critiques de la log-vraisemblance :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, X) = -\frac{n}{1-\theta} + \frac{n \cdot 10\theta^9}{1-\theta^{10}} + \frac{S_1}{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, X) = 0 \iff -\frac{1}{1-\theta} + \frac{10\theta^9}{1-\theta^{10}} + \frac{\overline{X}_n}{\theta} = 0$$

$$\iff \overline{X}_n = \frac{\theta}{1-\theta} - \frac{10\theta^{10}}{1-\theta^{10}}$$

l'EMV, s'il existe, alors il est solution de l'équation

$g(\hat{\theta}_n) = \overline{X}_n$ où $g(\hat{\theta}_n) = \frac{\hat{\theta}_n}{1-\hat{\theta}_n} - \frac{10\hat{\theta}_n^{10}}{1-\hat{\theta}_n^{10}}$

3) $g(\hat{\theta}_n)$ est un e.s.b. de $g(\theta)$ en effet :

$$E\left(g(\hat{\theta}_n)\right) = E(X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = EX_1 = \frac{9\theta^{11} - 10\theta^{10} + \theta}{(1-\theta^{10})(1-\theta)}$$

alors $b\left(g(\hat{\theta}_n)\right) = E\left(g(\hat{\theta}_n)\right) - g(\theta) = 0$.

Exercice 2 :

1) $\mathcal{L}\left(\frac{X}{Y}\right)$? On calcule d'abord la loi de (U,V) où $\begin{cases} U = \frac{X}{Y} \\ V = X \end{cases}$

$\forall h$ une fonction mesurable et bornée

$$E(h(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv \quad \text{mais aussi}$$

$$E(h(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x}{y}, x\right) f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy$$

Considérons alors la transformation : $\varphi : (x,y) \rightsquigarrow (u,v)$ avec

$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = x \end{cases}$ $\begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty \end{cases}$ alors $\begin{matrix} -\infty < u < +\infty \\ -\infty < v < +\infty \end{matrix}$

$\varphi^{-1} : (u,v) \rightsquigarrow (x,y)$ avec $\begin{cases} x = v \\ y = \frac{v}{u} \end{cases}$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} = \frac{v}{u^2}$$

et $\left|J_{\varphi^{-1}}\right| = \frac{|v|}{u^2}$

alors $dx\, dy = \frac{|v|}{u^2}\, du\, dv$

Comme X et Y sont indépendantes $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

qui peut être réécrite $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(v^2 + \frac{v^2}{u^2}\right)}$

$$\text{Alors } E(h(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{v^2}{u^2}\right)} \frac{|v|}{u^2}\, du\, dv$$

On en déduit la loi du couple (U,V) :

$$f_{(U,V)} = \frac{1}{2\pi}\frac{|v|}{u^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{v^2}{u^2}\right)\right)$$

La loi de $U = \frac{X}{Y}$ est obtenue par intégration sur $\mathbb{R}$ par rapport à la variable v :

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(U,V)}(u,v)\,dv = \frac{1}{2\pi u^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |v| \exp\left(-\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{v^2}{u^2}\right)\right) dv =$$

(qui est l'intégrale d'une fonction paire) $= \frac{1}{\pi u^2}\int_0^{+\infty} v\exp\left(-\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{v^2}{u^2}\right)\right)dv$

$$\left\langle \begin{array}{l} t = -\frac{1}{2}\left(v^2+\frac{v^2}{u^2}\right) \\ dt = \frac{\partial t}{\partial v}\,dv = -\frac{1}{2}(2v)\left(1+\frac{1}{u^2}\right)dv \end{array}\right\rangle \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{si } v=0 \Rightarrow t=0 \\ \text{si } v\to+\infty \Rightarrow t\to-\infty \end{array}\right\rangle$$

alors $f_U(u) = \frac{1}{\pi u^2}\int_0^{-\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}e^t\,(-dt) = \frac{1}{\pi u^2}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\left[e^t\right]_{-\infty}^0 =$

$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{u^2+1}$ qui est la densité d'une loi de Cauchy de paramètre 1.

2) si Z est une v.a. de loi de Cauchy de paramètre 1, d'après la 1ère question Z peut s'écrire comme le rapport $Z = \frac{X}{Y}$ où X et Y sont deux v.a.r.i. de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Il est clair alors que $Z^{-1} = \frac{Y}{X}$ a cette même propriété et donc Z^{-1} est également de loi de Cauchy de paramètre 1.

<u>Exercice 3:</u> $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$; $1 \le i \le n$

1) Par la LFGN $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} EX_1 = \frac{1}{\lambda}$.

on obtient alors par substitution l'estimateur de la méthode des moments $\hat{\theta}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$ du paramètre $\theta = \lambda$.

La convergence de cet estimateur est justifiée par la LFGN puisque les X_i sont i.i.d et intégrables en tant que v.a. de loi $f_{X_1}(x_i) = \theta e^{-\theta x_i} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x_i)$

2) EMV : loi de l'échantillon $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$

$$f_X(x) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n x_i}.$$

La vraisemblance est alors : $V(\theta, X) = \theta^n e^{-\theta S_1}$ où $S_1 = \sum_{i=1}^n X_i$

et la log-vraisemblance est définie par :

$L(\theta, X) = \ln V(\theta, X) = n \ln \theta - S_1 \theta$.

Recherche des points critiques de $L(\theta, X)$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, X) = \frac{n}{\theta} - S_1 . \quad \frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, X) = 0 \iff n - S_1 \theta = 0.$$

$\Rightarrow \hat{\hat{\theta}}_n = \frac{n}{S_1} = \frac{1}{\overline{X}_n}$ et on remarque que $\hat{\theta}_n$ est bien un maximum de $L(\theta, X)$ puisque $\frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta, X)$ $\xrightarrow{\quad + \quad \frac{1}{\overline{X}_n} \quad - \quad}$

$\hat{\hat{\theta}}_{nn} = \hat{\theta}_n$ les deux estimateurs sont égaux.

3) En utilisant les fonctions caractéristiques, nous avons : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_S(t) = E\left(e^{itS}\right) = E\left(e^{it\sum_{j=1}^n X_j}\right) = E\left(\prod_{j=1}^n e^{itX_j}\right) =$$

$= \prod_{j=1}^n E\left(e^{itX_j}\right)$ car les v.a. e^{itX_j} restent indépendantes tout comme les X_j, $1 \le j \le n$.

$$\varphi_S(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^n \frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda^n}{(\lambda - it)^n}$$ qui est bien

la fonction caractéristique d'une v.a. de loi $\Gamma(\lambda, n)$ et comme la fonction caractéristique définit la loi d'une v.a. il s'en suit que $S = \sum_{j=1}^{n} X_j \hookrightarrow \Gamma(\lambda, n)$.

4) $$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{1}{\overline{X}_n}\right) = E\left(\frac{n}{S}\right) = n\, E\left(\frac{1}{S}\right) = n \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} ds$$

$$= \frac{n\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} s^{n-2}\, ds = \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{(n-1)-1} \lambda\, ds$$

$$= \frac{n\lambda}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{(n-1)-1} dt = \frac{n\lambda}{(n-1)!} \Gamma(n-1) = \frac{n\lambda}{(n-1)!} (n-2)!$$

$$= \frac{n}{n-1} \lambda.$$

alors $\underset{\text{le biais}}{b} = (E(\hat{\theta}_n)) - \theta = \frac{n}{n-1}\lambda - \lambda = \frac{n\lambda - (n-1)\lambda}{n-1} = \frac{1}{n-1}\lambda$

$\hat{\theta}_n$ est un estimateur avec un biais $b = \frac{1}{n-1}\lambda$.

$\tilde{\theta}_n$ un estimateur sans biais est alors obtenu tel que $E(\tilde{\theta}_n) = \theta$ il suffit alors de poser $\tilde{\theta}_n = \hat{\theta}_n \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{S}$

en effet $E(\tilde{\theta}_n) = E\left(\hat{\theta}_n \cdot \frac{n-1}{n}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \lambda = \lambda.$

5) $\tilde{\tilde{\theta}}_n$ estimateur qui minimise $R(\theta_n^*(c), \theta)$

$$R(\theta_n^*(c), \theta) = E(\theta_n^*(c) - \theta)^2 = E\left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n} X_i} - \theta\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{c}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right)^2 + \theta^2 - 2\theta c\, E\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) =$$

$$= c^2 E\left(\frac{1}{S^2}\right) + \theta^2 - 2\theta c\, E\left(\frac{1}{S}\right)$$

$$R(\theta_n^*(c),\theta) = E\left(\frac{1}{S^2}\right)c^2 - 2\theta\, E\left(\frac{1}{S}\right)c + \theta^2$$

un calcul de $E\left(\frac{1}{S}\right) = n^{-1} E\left(\frac{1}{\bar{X}_n^*}\right) = \frac{1}{n-1}\theta$

et $E\left(\frac{1}{S^2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2} \frac{\theta^n}{(n-1)!} s^{n-1} \exp(-\lambda s)\, ds = \frac{\theta^2}{(n-1)!}\int_0^{+\infty} (\theta s)^{n-2-1} e^{-\lambda s}\,\theta ds$

$$= \frac{\theta^2}{(n-1)!}\Gamma(n-2) = \frac{\theta^2}{(n-1)!}(n-3)! = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

Alors $R_r(\theta_n^*(c),\theta) = \frac{\theta^2}{(n-1)(n-2)}c^2 - 2\theta^2\frac{1}{n-1}c + \theta^2$

Pour minimiser $R_r(\theta_n^*(c),\theta)$ il suffit de minimiser par rapport à c

$$R_1(\theta_n^*(c),\theta) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}c^2 - \frac{2}{n-1}c + 1.$$

$$R_1'(\theta^*(c),\theta) = \frac{2}{(n-1)(n-2)}c - \frac{2}{n-1}$$

$$R_1' = 0 \iff \frac{1}{n-2}c - 1 = 0 \iff \hat{c} = n-2.$$

Le minimum du risque quadratique est atteint si $c = n-2$.

Remarquons alors que l'estimateur $\frac{n-1}{S}$ est sans biais et de variance minimum (puisque son risque quadratique est minimum et il est sans biais) dans la famille des estimateurs de la forme $\theta_n^*(c)$.