Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence – S6 — Mai 2018

Equations aux Dérivées Partielles — Examen Final — 1H40

***Exercice 1(9pts)*:**

On considère le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}\,;\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

où f est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ L]$ *et* $c > 0$.

1. *On suppose que* $f \equiv 0$ *et on pose*

$$J(t) = \int_0^L \big(u(x,t)\big)^2 dx.$$

a. *Montrer que la fonction J est décroissante sur* $[0, +\infty[$.
b. *En déduire que la solution du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *est* $u \equiv 0$.
2. *Montrer que si le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution alors celle-ci est unique.*
3. *Résoudre le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *pour* $L = \pi$ *et* $f(x) = x(\pi - x)$.

***Exercice 2(7pts)*:**

En combinant la formule de D'Alembert et le principe de Duhamel, déterminer la solution du problème suivant, (où $a > 0$)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos x; \quad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ \ u_t(x,0) = 1 + x; \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

***Exercice 3 (4pts)*:**

1. $(Bonus)$ *Soit* $n, p \in \mathbb{N}^*$. *Montrer que si* $n \leq p$, *alors* $\mathbb{R}^n$ *peut-être considéré comme un sous-espace de* $\mathbb{R}^p$.
2. *On considère le problème suivant,*

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t)\,;\ \ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = g(x);\ \ x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x);\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions continues.

La solution de ce problème est donnée, en dimension 3, par la formule de Kirchhoff :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{|y|=1} g(x+cty)ds(y)\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} h(x+cty)\,ds(y).$$

Soit $g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$ *et* $h(x) = 0$.

En remarquant que les fonctions g et h dépendent seulement de x_1 *et* x_2, *utiliser la formule de Poisson (en 2D) issue de la formule de Kirchhoff (en 3D) par la méthode de descente d'Hadamard, pour déterminer explicitement la solution* $u(x,t)$ *du problème* $(\mathcal{P})$.

Bon Courage

Corrigé

***Exercice 1(9pts)*:**

Soit le problème suivant,

$$(\mathcal{P}_f)\quad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}\,; & 0 < x < L,\ \ t > 0 \\ u(0,t) = 0 = u(L,t);\ t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x);\ 0 \leq x \leq L, \end{cases}$$

f continue par morceaux sur $[0,\ L]$ *et* $c > 0$.

1. *On suppose que* $f \equiv 0$ *et on pose*
$$J(t) = \int_0^L (u(x,t))^2 dx.$$

a. *Montrons que la fonction J est décroissante sur* $[0,+\infty[$. **(2pts)**

La fonction $t \longmapsto u(x,t)$ *est au moins de classe* C^1, *donc J est dérivable sur* $]0,+\infty[$, *et*

$$J'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t))^2 dx = 2\int_0^L u(x,t)u_t(x,t)dx = 2c^2\int_0^L u(x,t)u_{xx}(x,t)dx\,.$$

Une intégration par parties donne,

$$J'(t) = 2c^2[u(x,t)u_x(x,t)]_{x=0}^{x=L} - 2c^2\int_0^L (u_x(x,t))^2 dx = -2c^2\int_0^L (u_x(x,t))^2 dx,$$

car $u(0,t) = 0 = u(L,t)$. *Ainsi* $J'(t) \leq 0, \forall t \in\,]0,+\infty[$ *et J est décroissante* $[0,+\infty[$.

b. *La fonction J est décroissante sur* $[0,+\infty[$, *d'où* $J(t) \leq J(0) = 0$, *pour tout* $t \geq 0$.

Or J est, par définition, positive sur $[0,+\infty[$, *d'où* $J \equiv 0$ *et par suite* $u \equiv 0$. **(1pt)**

Donc la solution du problème $(\mathcal{P}_0)$ *est nulle.*

2. *Montrons que si le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *admet une solution alors celle-ci est unique.*
Supposons que $(\mathcal{P}_f)$ *admet deux solutions v et w.*
La fonction $u = v - w$ *est solution du problème* $(\mathcal{P}_0)$ *puisque*
$$u(x,0) = v(x,0) - w(x,0) = f(x) - f(x) = 0.$$
D'après la question précédente, $u = 0$ *d'où* $v = w$. **(1pt)**

3. *Résolvons le problème* $(\mathcal{P}_f)$ *pour* $L = \pi$ *et* $f(x) = x(\pi - x)$.
Par la méthode de séparation de variables, posons $u(x,t) = X(x)T(t)$.
L'équation s'écrit
$$XT' = c^2X''T \quad d'\text{où} \quad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2T}.$$
Les variables sont indépendantes d'où
$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{c^2T} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}), \qquad \mathbf{(0,5pt)}$$

et on a

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & X(0) = 0 = X(\pi), \\ T' - \lambda c^2 T = 0. \end{cases}$$

- *Résolution de l'équation en X :*

Si $\lambda \geq 0$, *nous obtenons la solution triviale.*

Si $\lambda < 0$ *alors* $X(x) = A\cos\left(x\sqrt{-\lambda}\right) + B\sin\left(x\sqrt{-\lambda}\right)$

et des conditions aux limites, il s'ensuit que

$$A = 0, \quad B\sin\left(\pi\sqrt{-\lambda}\right) = 0.$$

La solution est non triviale pour $\sqrt{-\lambda} = n, n \in \mathbb{N}^*$ *i.e.* $\lambda = -n^2$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

La famille des solutions de l'équation en X est,

$$X_n(x) = a_n \sin(nx)\,, \ (n \in \mathbb{N}^*). \ (\mathbf{1pt})$$

- *Résolution de l'équation en T: Pour* $\lambda = -n^2$, $T' + n^2c^2T = 0$.

L'équation s'écrit $(T \not\equiv 0)$,

$$\frac{dT}{T} = -n^2c^2dt,$$

d'où $\ln|DT| = -n^2c^2t$, *(D constante réelle non nulle)*

et donc $T(t) = \frac{1}{\mathrm{D}}\exp(-n^2c^2t)$.

La famille des solutions en T est, $T_n(t) = b_n\exp(-n^2c^2t)$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ $(\mathbf{1pt})$

Ainsi nous obtenons la famille de solutions suivante :

$$u_n(x,t) = d_n\sin(nx)\exp(-n^2c^2t), \qquad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (\mathbf{0,5pt})$$

La solution du problème est donc

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n\sin(nx)\exp(-n^2c^2t). \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Déterminons à présent les coefficients d_n*:*

On a $u(x,0) = f(x) = x(\pi - x)$ *d'où*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n\sin(nx),$$

On reconnaît le développement en série de Fourier sinus, d'où

$$d_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi x - x^2)\sin(nx), \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Par une double intégration par parties nous obtenons,

$$d_n = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n) \quad (\mathbf{0,5pt})$$

et finalement

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1 - (-1)^n}{n^3}\exp(-n^2c^2t)\ \sin(nx). \quad (\mathbf{0,5pt})$$

Exercice 2(7pts):

Déterminons la solution du problème suivant, $(a > 0)$

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t); & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 1 + x; & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $f(x,t) = \cos x$.

Le problème $(\mathcal{P})$ peut-être divisé, à cause de la linéarité, en deux sous-problèmes et sa solution est la somme des solutions de ces deux sous-problèmes :

$$(\mathcal{P}_A)\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, \ \ u_t(x,0) = 1 + x; & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

et

$$(\mathcal{P}_D)\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t); & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0); & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

a. *La solution de $(\mathcal{P}_A)$, qui est homogène, est donnée par la formule de D'Alembert :*

$$u_A(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x+at) + \sin(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}(1+y)dy \quad \mathbf{(1pt)}$$

$$u_A(x,t) = \cos(at)\sin x + tx + t. \quad \mathbf{(1pt)}$$

b. *La solution du problème $(\mathcal{P}_D)$ non homogène, est donnée, d'après le principe de Duhamel, par :*

$$u_D(x,t) = \int_0^t v(x, t-s, s)\, ds \qquad (D) \quad \mathbf{(1pt)}$$

où $v(x,t,s)$ est la solution du problème homogène suivant associé à $(\mathcal{P}_D)$,

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v(x,0,s) = 0, \ v_t(x,0,s) = f(x,s) = \cos x\,; & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

Ici s est un paramètre réel.

Ce problème homogène admet pour solution, toujours par la formule de D'Alembert ;

$$v(x,t,s) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} f(y,s)\, dy = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \cos y\, dy = \frac{1}{a}\cos x\, \sin(at). \quad \mathbf{(0,5pt)}$$

En remplaçant dans (D) on trouve,

$$u_D(x,t) = \int_0^t v(x, t-s, s)\, ds = \frac{1}{a}\cos x \int_0^t \sin\big(a(t-s)\big)\, ds \ \ \mathbf{(0,5pt)}$$

$$u_D(x,t) = \frac{1}{a^2}(1 - \cos at)\cos x. \ \mathbf{(1pt)}$$

c. *La solution du problème initial $(\mathcal{P})$ est*

$$u(x,t) = u_A(x,t) + u_D(x,t) = \cos(at)\sin x + \frac{1}{a^2}(1-\cos at)\cos x + tx + t. \ \ \mathbf{(0,5pt)}$$

***Exercice 3 (4pts)*:**

1. $\mathbf{(1,5pt)}$ *Question bonus: Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Montrons que si $n \leq p$, alors $\mathbb{R}^n$ peut-être considéré comme un sous-espace de $\mathbb{R}^p$.*
 Considérons l'application linéaire
 $$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p, \quad F(x_1, x_2, \dots x_n) = (x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots 0) \in \mathbb{R}^p.$$
 L'application F est évidemment une isométrie (donc injective), c'est donc un isomorphisme isométrique de $\mathbb{R}^n$ dans $F(\mathbb{R}^n) = ImF$ qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Ainsi $\mathbb{R}^n$ et $F(\mathbb{R}^n)$ sont isométriques et on peut écrire, via cette identification, que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^p$.

2. *Soit le problème suivant,*

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t)\,;\;\; x \in \mathbb{R}^3, t>0 \\ u(x,0) = g(x);\;\;\; x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x);\; x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions continues.

La solution de ce problème est donnée, en dimension 3, par la formule de Kirchhoff :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{|y|=1} g(x+cty)ds(y)\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} h(x+cty)\,ds(y).$$

Soit $g(x) = g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2$ *et* $h(x) = 0.$

Les fonctions g et h dépendent seulement de x_1 *et* x_2*, utilisons la formule de Poisson pour déterminer explicitement la solution* $u(x,t)$ *du problème* $(\mathcal{P})$.

Rappelons-nous que le calcul de l'intégrale (triple) sur la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ *se ramène au calcul d'une intégrale (double) sur la projection de cette sphère sur le plan* (Ox_1x_2)*, c.à.d. sur le disque unité de* $\mathbb{R}^2$.

Paramétrisons l'hémisphère supérieur:

$$y_1^2+y_2^2+y_3^2 = 1 \Longrightarrow y_3 = \sqrt{1-y_1^2-y_2^2} =: \varphi(y_1,y_2\,),$$

et donc

$$ds(y) = \sqrt{1+|\nabla\varphi(y_1,y_2\,)|^2}dy_1dy_2 = \frac{dy_1dy_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}.$$

Remplaçons dans la formule de Kirchhoff tout en remarquant que la sphère est constituée de deux hémisphères, (dans notre problème $c=1$*)*

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(2t\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{g(x_1+ty_1,x_2+ty_2)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left(2t\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{h(x_1+ty_1,x_2+ty_2)}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2\right).\quad \mathbf{(1pt)}$$

Calcul explicite :

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{(x_1+ty_1)^2+(x_2+ty_2)^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{x_1^2+2tx_1y_1+t^2y_1^2+x_2^2+2tx_2y_2+t^2y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$u(x_1,x_2,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{(x_1^2+x_2^2)t+2(x_1y_1+x_2y_2)t^2+(y_1^2+y_2^2)t^3}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{x_1^2+x_2^2+4(x_1y_1+x_2y_2)t+3(y_1^2+y_2^2)t^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{x_1^2+x_2^2}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{dy_1dy_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}+\frac{2t}{\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$
$$+\frac{3t^2}{2\pi}\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{y_1^2+y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2.$$

On a, en passant aux coordonnées polaires dans la première et la troisième intégrales ;

$$\star\ \int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{dy_1dy_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta=2\pi.\ \mathbf{(0,5pt)}$$

$$\star\ \int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{x_1y_1+x_2y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2$$
$$=\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}}\frac{x_1y_1}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1\right)dy_2$$
$$+\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}}\frac{x_2y_2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_2\right)dy_1$$

$$=-x_1\int_{-1}^1\left(\left[\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\right]_{-\sqrt{1-y_2^2}}^{\sqrt{1-y_2^2}}\right)dy_2-x_2\int_{-1}^1\left(\left[\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}\right]_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}}\right)dy_1$$
$$=0.\ \mathbf{(1pt)}$$

$$\star\ \int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{y_1^2+y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}drd\theta,$$

en posant $v=1-r^2$,

$$\int_0^1\frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}}dr=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1-v}{\sqrt{v}}dv=\left[\sqrt{v}\right]_0^1-\frac{1}{3}\left[v\sqrt{v}\right]_0^1=\frac{2}{3},$$

d'où

$$\int_{y_1^2+y_2^2<1}\frac{y_1^2+y_2^2}{\sqrt{1-y_1^2-y_2^2}}dy_1dy_2=\left[\frac{2}{3}\theta\right]_0^{2\pi}=\frac{4\pi}{3}.\quad \mathbf{(0,5pt)}$$

Tout compte fait, nous trouvons,

$$u(x_1,x_2,t)=x_1^2+x_2^2+2t^2,\qquad \mathbf{(1pt)}$$

et la solution du problème initial est

$$u(x_1,x_2,x_3,t)=x_1^2+x_2^2+2t^2.$$