Dept. Mathématiques
Faculté des Sciences

Contrôle de Géométrie Différentielle

Exercice1

a) Soit M l'ensemble l'ensemble des points (x, y, z) de R^3 qui vérifient à la fois $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ et que $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - z^2 = 1$. Montrer que M est unesous-variété de R^3. quelle est sa dimension?

b) Soit M l'ensemble des points (x, y, z) de R^3 qui vérifient $x^2 + y^2 = z^2$. Montrer que M n'est pas une sous-variété de R^3.

Exercice2

a) Montrer que $SL_n(R) = \{A \in M_n(R) : \det(A) = 1\}$ est une sous-variété de $M_n(R)$. Quelle est sa dimension?

b) Montrer que l'espace tangent à $SL_n(R)$ en A est $T_A(SL_n(R)) = \{M \in M_n(R) : tr(A^{-1}M) = 0\}$. tr(A) désigne la trace de A.

Indication: on rappelle que la différentielle $d\det(id_n)(M) = tr(M)$.

Exercice3

Soit $f : R^n \to R^n$ une application de classe C^∞ telle que $fof = id$. On pose $Fix(f) = \{x \in R^n : f(x) = x\}$

1) Montrer que pour tout $x \in Fix(f)$, $(df(x))^2 = id$.

2) On suppose que $f(0) = 0$. On définit $h = \frac{1}{2}(id + d(f)(0)\, of)$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0. Montrer que $hof = df(0)oh$.

3) En déduire que $Fix(f)$ est une sous-variété de R^n.

Corrections du Contrôle de Géométrie différentielle

Exercice1

1) Montrons que M est une sous-variété de R^3

On considère l'application:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R^3 \to R^2 \\ (x,y,z) \quad &\to \quad f(x,y,z) = \left(x^2+2y^2+z^2-1, \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-z^2-1\right) \end{aligned}$$

alors $M = f^{-1}(\{(0,0)\})$.

Par ailleurs, nous avons:

$$df(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 2x-1 & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

Pour déduire que M est une sous-variété de R^3, on vérifie que pour $(x,y,z) \in M$, $df(x,y,z,)$ est de rang maximal i.e. de rang 2.

Considérons par exemple:

$$\begin{vmatrix} 2y & z \\ y & -z \end{vmatrix} = -3yz$$

qui serait nul pour $y = 0$ ou $z = 0$.

Pour $y = 0$, nous avons

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 2x-1 & -2z \end{vmatrix} = 2z(1-4x)$$

qui est nul pour $x = \frac{1}{4}$ ou $z = 0$.

Le cas $y = z = 0$ nous donne en remplaçant dans les équations de M:

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

qui n'a pas de solutions.

Le cas $y = 0$ et $x = \frac{1}{4}$ ne convient pas non plus.

Pour $z = 0$,on obtient

$$\begin{vmatrix} 2x & 4y \\ 2x-1 & 2y \end{vmatrix} = 4y(1-4x)$$

et le même raisonnement montre que ce déterminant ne peut pas s'annuler pour $(x,y,z) \in M$.

Donc pour tout $(x,y,z) \in M$, rang($df(x,y,z)$) $= 2$ et M est une sous variété de R^3 de dimension 2.

2) Montrons que le tore n'est pas une sous-variété de R^3.

En effet si le tore T^2 a une stucture de varété différentielle alors en tout point il admettrait une paramétrisation en particulier en son sommet qui est le point

$(0,0,0)$ et par conséquent il existerait une boule ouverte V de $(0,0,0)$ dans $R^{3.}$ et une boule ouverte U de $(0,0)$ dans R^2 est homéomorphisme $g : U \to V \cap T^2$. La restriction $g : U - \{(0,0)\} \to V \cap T^2 - \{(0,0,0)\}$ reste un homéomorphisme. Or $U - \{(0,0)\}$ a une composante composante alors que $V \cap T^2 - \{(0,0,0)\}$ a deux composantes connexes. Ce qui est contradictoire à notre supposition.

Exercice2

1) $SL_n(R)$ est une sous-variété de $M_n(R)$

En effet considérons l'application

$$f : M_n(R) \to R,\ f(A) = \det(A) - 1$$

alors $SL_n(R) = f^{-1}(\{0\})$.

Par ailleurs pour tout $M \in M_n(R)$, nous avons pour $t \in R$

$$f(A + tM) = \det(A + tM) - 1 = \det(A)\det\left(id_n + tA^{-1}M\right) - 1$$

d'où

$$\begin{aligned} df(A)(M) &= \det(A).\frac{d}{dt}_{t=0} \det\left(id_n + tA^{-1}M\right) = \det(A)\, d(id_n)\left(\left(A^{-1}M\right)\right) \\ &= \det(A).tr\left(A^{-1}M\right). \end{aligned}$$

et si $A \in SL_n(R)$ $df(A)(M) = tr\left(A^{-1}M\right)$.

Comme M est une matrice quelconque, en prenant $M = A$, on obtient

$$df(A)(A) = tr(id_n) = n \neq 0.$$

L'application df(A) est de rang 1 (rang maximal) pour tout $A \in SL_n(R)$ et par suite $SL_n(R)$ est une sous-variété de $M_n(R)$ de dimension $n^2 - 1$.

2) L'espace tangent $T_A SL_n(R) = Ker(df(A)) = \{M \in M_n(R) : df(A)(M) = 0\} = \left\{M \in M_n(R) : tr\left(A^{-1}M\right) = 0\right\}$.

Exercice3

1) Pour tout $x \in Fix(x)$, nous avons

$$fof(x) = id_{R^n}(x) = x$$

ce qui donne

$$df(f(x)).df(x) = df(x).df(x) = id_{R^n}.$$

i.e.

$$(df(x))^2 = id_{R^n}.$$

2) Si $f(0) = 0$ et $h = \frac{1}{2}(id_{R^n} + df(0).f)$ alors

$$\begin{aligned} dh(0) &= \frac{1}{2}\left(did_{R^n}(0) + df(0).df(0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(id_{R^n} + id_{R^n}\right) = id_{R^n} \in Isom(R^n). \end{aligned}$$

Par application du théorème de l'inversion locale, on déduit que h est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

3) Montrons que $hof = df(0).h$

$$\begin{aligned} hof &= \frac{1}{2}\left(f + df(0).fof\right) = \frac{1}{2}\left(f + df(0).fof\right) = \frac{1}{2}\left(\left(df(0)\right)^2 + df(0).id_{R^n}\right) \\ &= df(0).h. \end{aligned}$$