Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence – S6 Avril 2018

Equations aux Dérivées Partielles Examen Partiel 1H30

Exercice 1(7pts):

En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver la fonction $u(r,\theta)$ solution du problème suivant

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 1<r<\infty \\ u(1,\theta\ )=cos(4\theta), & 0\leq\theta\leq 2\pi. \end{cases}$$

Exercice 2(7pts):

On rappelle que le noyau de Poisson pour la boule ouverte $B_R(O)\subset\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial B_R=\ S_R(O)$, est la fonction $P_R\colon B_R(O)\times S_R(O)\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$P_R(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{nA(n)R|x-y|^n}$$

où $A(n)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $|x|$ est la norme euclidienne de x.

1. *Soit u une fonction harmonique dans $B_R(O)$ telle que $u\in C^1\left(\overline{B_R(O)}\right)$ et $u=g$ sur $S_R(O)$.*
   a. *Exprimer u en fonction de P_R et g.*
   b. *Calculer $u(0)$. Que représente cette valeur pour la fonction u?*
2. *a. Vérifier que $P_R(x,y)>0$ pour tout $(x,y)\in B_R(O)\times S_R(O)$.*
   b. Montrer que

$$\int_{S_R(O)}P_R(x,y)ds(y)=1.$$

Exercice 3 (6pts):

Soit w une fonction harmonique dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.

1. *Montrer que les fonctions $u\coloneqq w^2$ et $v\coloneqq\exp w$ sont sous-harmoniques.*
2. *A quelle condition ces deux fonctions sont-elles harmoniques ?*

Bon Courage

Corrigé

***Exercice 1(7pts)*:**

$$(\mathcal{P})\ \begin{cases} u_{rr}+\dfrac{1}{r}u_r+\dfrac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, & 1<r<\infty \\ u(1,\theta)=\cos(4\theta) & 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

On cherchera une solution bornée de $(\mathcal{P})$.

Posons $u(r,\theta)=R(r)T(\theta)$, *et portons dans l'équation, nous obtenons après division par* $R(r)T(\theta)$:

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=-\frac{T''}{T}.$$

Les variables r et θ étant indépendantes, les deux membres sont alors constants, on a

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R}=\lambda=-\frac{T''}{T}\ ,\ \ \lambda\ \text{constante réelle}\qquad \color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

L'équation de départ donne naissance aux deux équations suivantes :

$$\begin{cases} T''+\lambda T=0 \\ r^2R''+rR'-\lambda R=0. \end{cases}$$

a. $T''+\lambda T=0$
   - *Si* $\lambda=0$ *alors* $T(\theta)=A\theta+B$.
     Comme la fonction T doit-être périodique alors $A=0$ *et* $T\equiv cste$. $\color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$

   - *Si* $\lambda<0$ *alors* $T(\theta)=Ae^{\theta\sqrt{-\lambda}}+Be^{-\theta\sqrt{-\lambda}}$ *et pour la même raison* $T\equiv 0$. $\color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$

   - *Si* $\lambda>0$ *alors* $T(\theta)=A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta)+B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$ $\color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$
     Déterminons les coefficients A et B.
     Des conditions $T(0)=T(2\pi)$ *et* $T'(\theta)=T'(2\pi)$, *on obtient le système*

$$(S)\begin{cases} A\big(\cos(2\pi\sqrt{\lambda})-1\big)+B\sin(2\pi\sqrt{\lambda})=0 \\ -A\ \sin(2\pi\sqrt{\lambda})+B\big(\cos(2\pi\sqrt{\lambda})-1\big)=0. \end{cases}\quad \color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

Si le déterminant de (S) *est non nul alors* $A=B=0$ *et T est identiquement nulle . Les solutions non triviales sont alors obtenues pour* $\mathrm{Det}(S)=0$.

$$\mathrm{Det}(S)=0\Leftrightarrow\cos(2\pi\sqrt{\lambda})=1\Leftrightarrow\ \lambda=n^2,\ n\in\mathbb{N}^*.\ \color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$$

On obtient des solutions non triviales pour $\lambda=0$ *avec* $T\equiv cste$ *et pour* $\lambda=n^2\in\mathbb{N}^*$ *avec* $T(\theta)=A\cos(n\,\theta)+B\sin(n\,\theta)$. $\color{red}{(\mathbf{0,5\ pt})}$

La famille des solutions de l'équation enT est :

$$T_n(\theta) = A_n \cos(n\,\theta) + B_n \sin(n\,\theta)\,, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

b. *Résolvons l'équation en R:* $r^2R'' + rR' - \lambda R = 0$, *pour* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}$.

- *Si* $\lambda = 0$, *l'équation devient* $rR'' + R' = 0$.
  c.-à-d. $(rR')' = 0$ *d'où* $rR' = C$ *et* $R(r) = C_1 + C\ln|r|$.
  La solution doit-être bornée (au voisinage de $+\infty$*) donc* $C = 0$
  et $R \equiv cste$. $\mathbf{(0,5\,pt)}$

- *Si* $\lambda = n^2 \in \mathbb{N}^*$, $r^2R'' + rR' - n^2R = 0$,
  C'est une équation d'Euler, posons $R(r) = r^\alpha$ *et remplaçons dans l'équation, nous obtenons*
  $$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - n^2 r^\alpha = 0$$
  Ceci nous donne
  $$\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0 \qquad d'où \qquad \alpha = \pm n.$$
  Et la solution cherchée est, $R(r) = Dr^n + Er^{-n}$, $\mathbf{(0,5\,pt)}$
  comme R doit-être bornée au voisinage de $+\infty$, *on prend* $D = 0$
  et par suite $R(r) = Er^{-n}$. $\mathbf{(0,5\,pt)}$
  En combinant ces deux cas, la famille des solutions de l'équation en R est
  $$R_n(r) = E_n r^{-n}, \qquad n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{(0,5\,pt)}$$
  Par le principe de superposition la solution de $(\mathcal{P})$ *est*
  $$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(r)T_n(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^{-n}\left(c_n\cos(n\,\theta) + d_n\sin(n\,\theta)\right) \quad \mathbf{(0,5\,pt)}$$

où l'on a posé $c_n = A_nE_n$ *et* $d_n = B_nE_n$. *Déterminons les coefficients* c_n *et* d_n *:*

On a $u(1,\theta) = \cos(4\theta)$ *d'où*

$$\cos(4\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\cos(n\theta) + d_n\sin(n\theta)$$

D'où (par identification !): $c_4 = 1$, $c_n = 0$ *pour* $n \neq 4$ *et* $d_n = 0$ *pour* $n \in \mathbb{N}$. $\mathbf{(0,5\,pt)}$

Remarque :
On peut calculer explicitement ces valeurs, qui ne sont que les coefficients de Fourier de la fonction $\theta \longmapsto \cos(4\theta)$, *à savoir*

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(4\alpha)\,d\alpha,$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(4\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha, \quad d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(4\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha, \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

***M**aintenant en portant ces coefficients dans l'expression de* $u(r,\theta)$ *on obtient*

$$u(r,\theta) = \frac{1}{r^4}\cos(4\theta)\,, \quad r \geq 1. \quad \mathbf{(0,5\,pt)}$$

***Exercice 2(7pts)*:**

Le noyau de Poisson pour la boule ouverte $B_R(O) \subset \mathbb{R}^n$ de frontière $\partial B_R = S_R(O)$, est la fonction P_R de $B_R(O) \times S_R(O)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$P_R(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n}$$

($A(n)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ et $|x|$ est la norme euclidienne de x.)

1. *Soit u une fonction harmonique dans $B_R(O)$ telle que $u \in C^1(\overline{B_R(O)})$ et $u = g$ sur $S_R(O)$.*
   a. *Exprimons u en fonction de P_R et g.*
   En utilisant la fonction de Green on a pour tout $x \in B_R(O)$,

$$u(x) = -\int_{B_R(O)} G(x,y)\,\Delta u(y)dy - \int_{S_R(O)} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta} u(y)ds(y), \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

où η est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur de $B_R(O)$.
Comme u est harmonique dans $B_R(O)$ et que pour tout $(x,y) \in B_R(O) \times S_R(O)$,

$$-\frac{\partial G(x,y)}{\partial \eta} = P_R(x,y) \quad (\mathbf{1\ pt})$$

on obtient $(\mathbf{1,5\ pt})$

$$u(x) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} u(y)ds(y) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} g(y)ds(y) \quad (*)$$

   b. *Calculons $u(0)$:*
   D'après la formule précédente on a

$$u(0) = \int_{S_R(O)} \frac{R^2}{nA(n)R|y|^n} u(y)ds(y) = \frac{1}{nA(n)R^{n-1}} \int_{S_R(O)} u(y)ds(y), \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

car $|y| = R$ puisque $y \in S_R(O)$.
On a $Mes\big(S_R(O)\big) = nA(n)R^{n-1}$ et donc $u(0)$ est la valeur moyenne de u sur $S_R(O)$ (et aussi la valeur moyenne de u dans $B_R(O)$ car u est harmonique). $(\mathbf{2x0,5\ pt})$

3. *a. On a $P_R(x,y) > 0 \ \forall\ (x,y) \in B_R(O) \times S_R(O)$, évident puisque $|x| < R$.*
   b. Montrons que

$$\int_{S_R(O)} P_R(x,y)ds(y) = 1.$$

Il suffit de prendre $u \equiv 1 \in C^2(\overline{B_R(O)})$, qui est évidemment harmonique, $(\mathbf{0,5\ pt})$ *et remplacer dans $(*)$, il vient alors*

$$1 = \int_{S_R(O)} \frac{R^2 - |x|^2}{nA(n)R|x-y|^n} ds(y) = \int_{S_R(O)} P_R(x,y)ds(y). \qquad (\mathbf{1\ pt})$$

***Exercice 3 (6pts)*:**

Soit w une fonction harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

1. *Montrons que les fonctions* $u := w^2$ *et* $v := \exp w$ *sont sous-harmoniques.*
   Les fonctions u et v sont de classe C^2 *dans* Ω. $(\mathbf{0,5\ pt})$
   On a

$$\Delta u = \Delta w^2 = \Delta(ww) = w\Delta w + 2\nabla w.\nabla w + w\Delta w = 2w\Delta w + 2|\nabla w|^2, (\mathbf{1\ pt})$$

comme w est harmonique i.e $\Delta w = 0$ *on obtient*

$$\Delta u = 2|\nabla w|^2,$$

donc $-\Delta u \leq 0$ *et la fonction u est sous-harmonique.* $(\mathbf{0,5\ pt})$

Pour la fonction v écrivons

$$\Delta v(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x), \quad \text{où } x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega.$$

On a

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial \exp w}{\partial x_i} = \exp w \frac{\partial w}{\partial x_i} = v \frac{\partial w}{\partial x_i}. \quad (\mathbf{0,5\ pt})$$

Et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v \frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = v\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}. (\mathbf{0,5\ pt})$$

Ainsi

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{i=n} v\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 + v\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = (|\nabla w|^2 + \Delta w)v. \quad (\mathbf{1\ pt})$$

Et puisque w harmonique, on obtient

$$\Delta v = |\nabla w|^2 v = |\nabla w|^2 \exp w, \quad (\mathbf{0,5\ pt})$$

soit $-\Delta v = -|\nabla w|^2 \exp w \leq 0$ *et la fonction v est sous harmonique.* $(\mathbf{0,5\ pt})$

2. *Les fonctions u et v sont harmoniques si et seulement si*

$$\Delta u = 0 = \Delta v.$$

D'après la première question u et v sont harmoniques si

$$|\nabla w| = 0. \quad (\mathbf{0,5\ pt})$$

Donc u et v sont harmoniques si w est constante sur Ω. $(\mathbf{0,5\ pt})$

Fin