Université de Tlemcen
Département de Mathématiques le 15-04-2018

Rattrapage du Contrôle Continu de "Introduction aux processus Stochastiques".

Exercice 1 : Soit (X,Y) un couple aléatoire sur $\mathbb{R}^2$ continu et de densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} n(n-1)(y-x)^{n-2} & \text{si } 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } n \ge 2.$$

1) Quelle est la loi marginale de X ?
2) Déterminer la loi conditionnelle de Y en $X=x$: $f_Y^{X=x}$.
3) En déduire $E(Y/X=x)$ et $E(Y/X)$.
4) Calculer la loi marginale de Y.
5) Les variables X et Y sont elles indépendantes ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a.i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. 1) Montrer que la moyenne empirique $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge dans L^2 vers la moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

2) On pose $Y_n = \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$. Montrer que $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera les paramètres. (On pourra utiliser la fonction caractéristique).

Exercice 3

Soit X, Y et Z des variables aléatoires indépendantes

1) On suppose que X suit une loi de Cauchy, déterminer la loi de $\frac{1}{X}$
2) On suppose que Y et Z suivent une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer alors que $\frac{Y}{Z}$ suit une loi de Cauchy

Durée 1h30 mn Bon Courage !