Université de Tlemcen
Département de Mathématique le 11-04-2018

Contrôle continu de "Introduction aux Processus Stochastiques"
Durée 1h 30 mn

Exercice .1. *On cultive deux variétés de fruit A et B . La proportion des fruits A est p , celle des fruits B étant 1 - p . On note : X la variable aléatoire du poids d'un fruit de la variété A , de densité* f_A *et de paramètres (moyenne et écart-type)* m_A *et* σ_A *et Y la variable aléatoire du poids d'un fruit de la variété B , de densité* f_B *et de paramètres* m_B *et* σ_B*. On considère alors Z la variable aléatoire du poids d'un fruit de la récolte. Déterminer la fonction de répartition de Z :* F_Z*, sa densité :* f_Z *et ses paramètres :* m_Z *et* σ_Z*.*

Exercice .2. *Soit X la variable aléatoire de loi* $\Gamma(a, \frac{1}{\theta})$ *définie pour* $x > 0$ *par sa fonction de densité*

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta^a \Gamma(a)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a-1} , \quad a > 0 , \quad \theta > 0.$$

1. Calculer $E(X)$ *et* σ_X^2*.*
2. Posons $Y = \ln X$*, calculer la fonction caractéristique de* Y*. En déduire* $E(Y)$ *et* σ_Y^2*.*

Exercice .3. *Soit* $\{X_n, n \geq 1\}$ *la suite de variables aléatoires où chaque variable* X_n *prend les valeurs 0 et* n *avec les probabilités respectives* $1 - \frac{1}{n^2}$ *et* $\frac{1}{n^2}$*.*
1. Montrer que la suite $\{X_n\}$ *converge en probabilite vers 0.*
2. La suite $\{X_n, n \geq 1\}$ *est-elle convergente presque sûrement ? Est-elle convergente en moyenne ? Justifiez votre réponse.*

Exercice .4. *Soit* X, Y *deux variables aléatoires réelles i.i.d. de fonction de densité*

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{1}{x^2} \text{ si } x \in [1, +\infty[.$$

1. Calculer la loi du couple aléatoire (U, V) *défini par* $U = X.Y$ *et* $V = \frac{X}{Y}$*.*
2. Calculer $E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right)$*.*

Bon courage.

Corrigé de l'épreuve de C.C.

Exercice 1 : soit X = "poids d'un fruit de la variété A"

$X \hookrightarrow f_A \; ; \; m_A \; ; \; \sigma_A$

et Y = "poids d'un fruit de la variété B".

$Y \hookrightarrow f_B \; ; \; m_B \; ; \; \sigma_B$

$P(A) = p \; ; \; P(B) = 1-p.$

Soit Z = " poids d'un fruit de la récolte".

$\forall z \in \mathbb{R} \quad F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(A) \cdot P(X \leq z) + P(B) \cdot P(Y \leq z) =$

$= p F_X(z) + (1-p) F_Y(z) = p \int_{-\infty}^{z} f_A(x)\,dx + (1-p) \int_{-\infty}^{z} f_B(x)\,dx.$

et par dérivation par rapport à z, il vient :

$f_Z(z) = p\, f_A(z) + (1-p)\, f_B(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$

$E(Z) = m_Z = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_Z(x)\,dx = p \int_{-\infty}^{+\infty} x f_A(x)\,dx + (1-p) \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_B(x)\,dx$

$= p\, m_A + (1-p)\, m_B$

De même $E(Z^2) = p\, E(X^2) + (1-p)\, E(Y^2)$

Alors $E(Z^2) = p\,(\sigma_A^2 + m_A^2) + (1-p)\,(\sigma_B^2 + m_B^2)$,

et donc $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = p\,(\sigma_A^2 + m_A^2) + (1-p)\,(\sigma_B^2 + m_B^2) -$

$- \left[p\, m_A + (1-p)\, m_B\right]^2.$

Exercice 2 :

$f_X(x) = \frac{1}{\theta^a \Gamma(a)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a-1}, \quad a > 0, \; \theta > 0.$

1) $E(X) = \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\theta^a \Gamma(a)} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a-1}\,dx = \frac{\theta}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \cdot \left(\frac{x}{\theta}\right)^{a+1-1} \frac{dx}{\theta}$

$\left\langle u = \frac{x}{\theta} \right\rangle \; E(X) = \frac{\theta}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \exp(-u)\, u^{a+1-1}\,du = \frac{\theta}{\Gamma(a)} \Gamma(a+1) = \frac{\theta a \Gamma(a)}{\Gamma(a)}$

alors $E(X) = \theta a.$

$EX^2 = \frac{1}{\theta^a \Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) x^{a+1}\,dx = \frac{\theta^2}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \left(\frac{x}{\theta}\right)^{a+2-1} \frac{dx}{\theta} = a^2 (a+1)^2 \theta.$

Il s'en suit : $V(X) = a(a+1)\,\theta^2 - (a\theta)^2 = a\,\theta^2$

Exercice 3 :

1) Convergence en probabilité :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = n)$ (car sinon $X_n = 0$

et alors $|X_n| < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$).

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{Proba}} 0$.

2) Convergence presque sûre :

Si (X_n) converge p.s. alors ce sera vers 0 car on a déjà la convergence en probabilité.

Rappelons que $\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n| \geqslant \varepsilon) = P(X_n \geqslant \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n^2}$

on utilise alors le critère de la convergence de la série :

$\sum\limits_{n \geqslant 1} P(|X_n - 0| \geqslant \varepsilon) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$ car il s'agit d'une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.

Ainsi $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s}} 0$

3) Convergence en moyenne

$\forall n \geqslant 1, \ E(|X_n - 0|) = \sum\limits_{x \in D_{X_n}} |x|\, P_{X_n}(x) = 0\, P_{X_n}(0) + n\, P_{X_n}(n) =$

$= 0 + n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

alors $E(|X_n - 0|) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L^1} 0$

(Hors examen)

Complément sur l'exercice : Rappel du résumé de comparaison des modes de convergences.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Conv. P.s}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\text{Conv. en probabilité}} \arrow[d, Rightarrow] & \boxed{\text{la convergence en moyenne } (L^1)} \arrow[l, Rightarrow] \\ \boxed{\text{Conv. ponctuelle (classique)}} \arrow[u, Rightarrow] & \boxed{\text{la convergence en loi}} & \end{tikzcd}$$

et si $p < q$: $\boxed{\text{la convergence } L^p} \Leftarrow \boxed{\text{la convergence } L^q}$

Les implications réciproques sont fausses en général

<u>Exercice 4</u> : $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1) Soit h une fonction mesurable et bornée, alors par le théorème de transfert :

$$\begin{cases} E(h(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{(U,V)}(u,v)\, du\, dv \\ E(h(U,V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v) f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \end{cases}$$

Considérons la transformation $\varphi : (x,y) \rightsquigarrow (u,v) = \varphi(x,y) \,/\, \begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$

$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\frac{u}{v}} \end{cases}$ Ici toutes les variables sont positive à cause du support de f_X : $[1, +\infty[$

$u = xy \geq 1$ car $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ et $\frac{u}{v} \geq 1$ car $y^2 \geq 1$ et $u.v \geq 1$

$\frac{u}{v} \geq 1 \Leftrightarrow u \geq v$, $u.v \geq 1 \Leftrightarrow v \geq \frac{1}{u}$.

Ainsi $S_{(U,V)} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \frac{1}{u} \leq v \leq u \wedge u \geq 1\}$.

$\varphi^{-1} : (u,v) \rightsquigarrow (x,y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)$. et $J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{\varphi^{-1}} = \frac{1}{2v} \text{ et } |\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{2v}.$$

Ainsi : $E\left(h(U,V)\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(u,v)\, f_{(X,Y)}(x,y)\, \frac{1}{2v}\, du\, dv =$

$= \int_1^{+\infty} \int_{\frac{1}{u}}^{u} h(u,v) \frac{1}{x^2} \frac{1}{y^2} \frac{1}{2v}\, du\, dv = \int_1^{+\infty} \int_{\frac{1}{u}}^{u} h(u,v) \frac{1}{uv} \frac{v}{u} \frac{1}{2v}\, du\, dv$

Ainsi $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2u^2 v}$ $\mathbb{1}_{(u,v)}$ $[1,+\infty[\times [\frac{1}{u}, u]$

2) $\mathcal{L}(U)$. $f_U(u) = \int_{C_V} f_{(U,V)}(u,v)\, dv$ ici C_V est défini par : $\begin{cases} \frac{1}{u} \leq v \leq u \\ 1 \leq u < +\infty \end{cases}$

$\forall u \in [1,+\infty[$ $f_U(u) = \int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2 v}\, dv$

$f_U(u) = \frac{1}{2u^2} \left[\ln v\right]_{\frac{1}{u}}^{u} = \frac{\ln u}{u^2}$ si $u \in [1,+\infty[$ et $f_U(u) = 0$ sinon.

et $E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right) = \int_{C_U} \frac{1}{\sqrt{u}} f_U(u)\, du = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\ln u}{u^2}\, du = \int_1^{+\infty} u^{-\frac{5}{2}} \ln u\, du$

$\left\langle \begin{array}{l} t = \ln u \ ; \ dt = \frac{1}{u}\, du \\ ds = u^{-\frac{5}{2}}\, du \ ; \ s = -\frac{2}{3} u^{-\frac{3}{2}} \end{array} \right\rangle$ $E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right) = \left\{ -\frac{2}{3} u^{-\frac{3}{2}} \ln u + \frac{2}{3} \int \frac{1}{u} u^{-\frac{3}{2}}\, du \right\}_1^{+\infty}$

$E\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\right) = \left\{ -\frac{2}{3} u^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \int u^{-\frac{5}{2}}\, du \right\}_1^{+\infty} = \left\} -\frac{2}{3} u^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}\left(\frac{-2}{3}\right) u^{-\frac{3}{2}} \right\}_1^{+\infty} =$

$= \left(-\frac{4}{9}\right) \left. u^{-\frac{3}{2}} \right]_1^{+\infty} = \frac{4}{9}$