Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence – S5 — 28 Juin 2018

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen de Rattrapage — 1H45

Exercice 1:

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ *l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Pour* $P, Q \in E$ *on pose* $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

1. *Montrer que l'application de* $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle$ *définit un produit scalaire sur E.*
2. *Soit* $F = \mathbb{R}_1[X]$.
   a. *Montrer que F est un s-ev fermé de E.*
   b. *Déterminer* $d(X^2, F)$, *distance du polynôme* X^2 *à F.*

Exercice 2:

Soit H un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

1. *Soit B une boule ouverte de H de centre* x_0 *et de rayon* $r > 0$ *telle que* $0 \notin B$.
   Montrer qu'il existe une forme linéaire f continue sur H telle que
   $$f(x) > 0;\ \ \forall x \in B.$$
   Ind. : Construire f sous la forme $f = \langle x_0, .\rangle$.
2. *Soit* $l: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue.*
   Montrer qu'il existe un seul élément $A \in \mathcal{L}(H)$ *tel que*
   $$l(x, y) = \langle A(x), y\rangle;\quad \forall x, y \in H.$$

Exercice 3:

Soit $F = C([0,1]; \mathbb{R})$ *muni de la norme de la convergence uniforme* $\|.\|_\infty$ *et*

$$G = \left\{ f \in F;\ \ f(0) = 0 \ et\ \int_0^1 f(x)dx \geq 1 \right\}.$$

1. *On définit les applications* $\varphi: F \longrightarrow \mathbb{R};\ \ \varphi(f) = f(0)$, *et*
   $$\psi: F \longrightarrow \mathbb{R};\ \ \psi(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$
   a. *Montrer que* φ *et* ψ *sont des formes linéaires continues.*
   b. *Calculer* $\|\varphi\|_{F'}$ *et* $\|\psi\|_{F'}$ *(*F' *désigne le dual topologique de F).*
2. *En déduire que G est complet.*
3. *Montrer que pour tout* $f \in G$, $\|f\|_\infty > 1$.
4. *G est-il compact ?*

Barème: *Exercice 1: 6 points* *Exercice 2: 6 points* *Exercice 3: 8 points*

Bon Courage

Corrigé

***Exercice 1*:**

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Pour $P, Q \in E$ *on pose* $\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.

1. **(2 pts)** *Montrons que l'application* $S: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $S(P, Q) = \langle P, Q\rangle$ *définit un produit scalaire sur E.*
   a. *La bilinéarité et la symétrie de S sont évidentes.*
   b. *S est définie positive:* $\forall P \in E; S(P,P) = P^2(0) + P^2(1) + P^2(2) \geq 0$.
   c. *Montrons que,* $\forall P \in E: S(P,P) = 0 \Leftrightarrow P = 0$.
   Si $P = 0$ *alors* $S(P,P) = 0$.
   Soit $P \in E$ *tel que* $S(P,P) = 0$. *On a*
   $$S(P,P) = 0 \Longrightarrow P^2(0) + P^2(1) + P^2(2) = 0 \Longrightarrow P(0) = P(1) = P(2) = 0.$$

Ainsi P admet trois zéros distincts, mais P est un polynôme de degré ≤ 2, *d'où* $P = 0$.

Autre façon de faire: Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$. *On a*
$$P(0) = 0 \Longrightarrow c = 0.$$
$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Longrightarrow a = b = 0,$$
d'où $P = 0$.

En conclusion S définit un produit scalaire sur E.

2. *Soit* $F = \mathbb{R}_1[X]$.
   a. **(2 pts)** - *F est évidemment un s-ev de E.*
   - *F est fermé, car F est de dimension finie* ($\dim F = 2$).
   b. **(2 pts)** *Déterminons la distance* $d(X^2, F)$. *On sait que*
   $$d(X^2, F) = \min_{P\in F} \|X^2 - P\| = \|X^2 - P_1\|,$$

où $P_1 \in F$ *est la projection orthogonale de P sur F et*
$$\|Q\| = \sqrt{\langle Q, Q\rangle} = \sqrt{Q^2(0) + Q^2(1) + Q^2(2)}.$$
On a
$$\langle X^2 - P_1, \;\; Q\rangle = 0, \forall Q \in F \qquad (*)$$
Posons $P_1 = aX + b$. *En remplaçant Q par 1 ensuite par X dans* $(*)$ *nous obtenons le système*
$$\begin{cases} (X^2 - aX - b)(0) + (X^2 - aX - b)(1) + (X^2 - aX - b)(2) = 0 \\ [(X^2 - aX - b)X](0) + [(X^2 - aX - b)X](1) + [(X^2 - aX - b)X](2) = 0, \end{cases}$$
d'où
$$\begin{cases} -b + 1 - a - b + 4 - 2a - b = 0 \\ 1 - a - b + 8 - 4a - 2b = 0, \end{cases}$$
soit
$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9, \end{cases}$$
d'où l'en tire $a = 2$ *et* $b = -1/3$ *et par suite* $P_1 = 2X - (1/3)$ *et finalement*
$$d(X^2, F) = \|X^2 - P_1\| = \sqrt{(X^2 - P_1)^2(0) + (X^2 - P_1)^2(1) + (X^2 - P_1)^2(2)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 2:

H étant un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. *Soit B une boule ouverte de H de centre x_0 et de rayon $r > 0$ telle que $0 \notin B$.*

   (3 pts) *Montrons qu'il existe une forme linéaire f continue sur H telle que*

$$f(x) > 0; \quad \forall x \in B.$$

Construisons f sous la forme $f = \langle x_0, . \rangle$. Ayant cette forme f est linéaire.

Remarquons ensuite que pour tout élément x de H : $x \in B \Leftrightarrow \exists t \in [0, r[; x = x_0 + tu$, où u est un vecteur de H de norme 1.

On a pour tout $x \in B$, $f(x) = \langle x_0, x \rangle = \langle x_0, x_0 + tu \rangle$ pour un certain $t \in [0, r[$, d'où

$$f(x) = \|x_0\|^2 + t\langle x_0, u \rangle.$$

Comme $|\langle x_0, u \rangle| \leq \|x_0\|\|u\| = \|x_0\|$ i.e. $-\|x_0\| \leq \langle x_0, u \rangle \leq \|x_0\|$ alors

$$f(x) \geq \|x_0\|^2 - \|x_0\|t = \|x_0\|(\|x_0\| - t)$$

Reste à vérifier que $\|x_0\| - t > 0$. Evidemment $\|x_0\| > 0$ car $0 \notin B$.

Pour cette même raison $\|x_0\| - t > 0$ car 0 étant en dehors de $B_r(x_0)$, nous avons $\|x_0 - 0\| \geq r > t$ ce qui donne $\|x_0\| > t$ et par conséquent $f(x) > 0; \quad \forall x \in B$.

2. **(3 pts)** *Soit $l: H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue.*

   Montrons qu'il existe un seul élément $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$l(x, y) = \langle A(x), y \rangle; \quad \forall x, y \in H$$

Pour tout $x \in H$, l'application $y \longmapsto l(x, y)$ est une forme linéaire continue sur H, donc d'après le théorème de représentation Riesz il existe un unique élément $v_x \in H$ tel que $l(x, y) = \langle v_x, y \rangle$, $\forall y \in H$.

Considérons l'application $A: H \longrightarrow H, x \longmapsto A(x) = v_x$.

D'après ce qui précède on a pour tous $x, y \in H, l(x, y) = \langle A(x), y \rangle$.

- *Montrons que A est linéaire. Soit $x_1, x_2 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Pour tout $y \in H$ on a, par bilinéarité de l,

$$l(x_1 + \alpha x_2, y) = l(x_1, y) + \alpha l(x_2, y) = \langle A(x_1), y \rangle + \alpha \langle A(x_2), y \rangle,$$

or par définition de A, $l(x_1 + \alpha x_2, y) = \langle A(x_1 + \alpha x_2), y \rangle$

d'où $A(x_1 + \alpha x_2) = A(x_1) + \alpha A(x_2), \forall x_1, x_2 \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Montrons que A est continue. On a pour tout $x \in H$*

$$\|Ax\| = \sup\{|\langle A(x), y \rangle|; \ \|y\| \leq 1\} = \sup\{|l(x, y)|; \ \|y\| \leq 1\}.$$

La forme bilinéaire l est continue donc il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|l(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|, \forall x, y \in H,$$

d'où

$$\|Ax\| \leq \sup\{C\|x\|\|y\|; \ \|y\| \leq 1\} \leq C\|x\|.$$

Ceci prouve que l'application linéaire A est continue et $\|A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C$.

Exercice 3:

Soit $F = C([0,1];\mathbb{R})$ *muni de la norme de la convergence uniforme* $\|.\|_\infty$ *et*

$$G = \left\{f \in F;\ \ f(0) = 0 \ et\ \int_0^1 f(x)dx \geq 1\right\}.$$

1. *On définit les applications* $\varphi: F \longrightarrow \mathbb{R};\ \varphi(f) = f(0)$, *et*

$$\psi: F \longrightarrow \mathbb{R};\ \psi(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

a. **(2 pts)** *Les applications* φ *et* ψ *sont évidemment linéaires, montrons qu'elles sont continues.*

$$\forall f \in F;\ |\varphi(f)| = |f(0)| \leq \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Ainsi φ *est continue et* $\|\varphi\|_{F'} \leq 1$.

Pour ψ *on a pour tout* $f \in F$,

$$|\psi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \leq \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)| \int_0^1 dx = \|f\|_\infty,$$

d'où ψ *est continue et* $\|\psi\|_{F'} \leq 1$.

b. **(1 pt)** *En prenant* $f \equiv 1$ *pour les deux applications on trouve*

$|\varphi(f)| = |f(0)| = 1$ *d'où* $\|\varphi\|_{F'} = 1$.

$|\psi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 dx\right| = 1$ *et donc* $\|\psi\|_{F'} = 1$.

2. **(2 pts)** *On a*

$$G = \left\{f \in F;\ \ f(0) = 0 \ et\ \int_0^1 f(x)dx \geq 1\right\} = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}([1,+\infty[),$$

comme les applications φ *et* ψ *sont continues alors* $\varphi^{-1}(\{0\})$ *et* $\psi^{-1}([1,+\infty[)$ *sont fermés dans* F *d'où* G *est fermé (intersection de deux fermés).*

F *étant complet donc* G *est lui aussi complet (car c'est un fermé dans un complet).*

3. **(2 pts)** *Montrons que pour tout* $f \in G$, $\|f\|_\infty > 1$.

Supposons par l'absurde que pour un certain $g \in G$ *on ait* $\|g\|_\infty \leq 1$.

On a puisque $g \in G$

$$1 \leq \int_0^1 g(x)dx \leq \|g\|_\infty \int_0^1 dx \leq 1$$

D'où

$$\int_0^1 g(x)dx = 1 = \int_0^1 dx \quad i.e \quad \int_0^1 (1 - g(x))dx = 0. \qquad (*)$$

Or

$$g(x) \leq \|g\|_\infty \leq 1, \qquad \forall x \in [0,1]$$

donc la fonction $1 - g$ *est positive d'où d'après* $(*)$ $g \equiv 1$.

Ce qui est babsurde car $g(0) = 0$ *puisque* $g \in G$.

4. **(1 pt)** *G n'est pas compact: Posons pour* $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = (1+n)x$.

On a $g_n \in G$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *mais* $\|g_n\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1}|g_n(x)| = 1 + n \longrightarrow +\infty$.