Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^{e} Année Licence - S5 — Janvier 2018

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen Final — 1H45

***Exercice 1*:** *Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{L}(E)$ $(A: E \longrightarrow E$ application linéaire continue). On suppose que A est coercive, ie*

$$\exists \gamma > 0, \forall x \in E;\ |\langle Ax, x\rangle| \geq \gamma \|x\|^2.$$

Le but de l'exercice est de montrer que A est inversible dans $\mathcal{L}(E)$ et que $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$.

1. *Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$.*
   En déduire que l'opérateur A est injectif.
2. *Montrer l'opérateur $A^{-1}: A(E) \longrightarrow E$ est continu et $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$.*
3. *Montrer que $A(E)$ est fermé dans E.*
4. *Montrer que $A(E)^{\perp} = \{0\}$. En déduire que A est inversible dans $\mathcal{L}(E)$.*

***Exercice 2*:** *Soient $\Omega =]0, L[$ $(L > 0)$ et $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\quad v' \in L^2(\Omega)\},$$

où v' est la dérivée de v au sens faible, elle désigne la fonction $g \in L^2(\Omega)$ vérifiant,

$$\int_0^L v(x)\, \varphi'(x) dx = -\int_0^L g(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle v, w\rangle = \int_0^L v(x)\, w(x)dx + \int_0^L v'(x)\, w'(x)dx.$$

La norme associée est donnée par: $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

1. *Soit $G = \{v \in H^1(\Omega),\ v(0) = 0\}$.*
   a. *Montrer que G est un sous-espace de Hilbert de $H^1(\Omega)$.*
   b. *Montrer que ; $\forall v \in G, \|v\|_{L^2} \leq L\|v'\|_{L^2}$. Conclure.*
   On munit maintenant G de la norme $\|\,.\,\|_+$ définie par $\|v\|_+ = \|v'\|_{L^2}$.
2. *Soit (P) le problème suivant:*
   $$\begin{cases} -(Au')' = kA \ \ sur\ \ ]0,\ L[\\ \quad u(0) = u'(L) = 0. \end{cases}$$
   où $k \in \mathbb{R}^*$ et $A \in C^2(\overline{\Omega})$ telle que,
   $$\exists \beta > 0, \forall x \in [0, L];\ A(x) \geq \beta.$$
   a. *Montrer que la solution u de (P) vérifie l'équation variationnelle (EV) suivante:*
   $$\forall v \in G, \quad \int_0^L A(x)u'(x)v'(x)\, dx = k\int_0^L A(x)v(x)\, dx.$$
   b. *Montrer que la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{B}$ définie sur $G \times G$ par*
   $$\mathcal{B}(u, v) = \int_0^L A(x)u'(x)v'(x)\, dx$$
   est continue et coercive.
   c. *En déduire que l'équation variationnelle (EV) admet une unique solution $u \in G$.*

Tourner la page

Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 — Janvier 2018

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen Final — 1H45

***Exercice 3*:** *1. Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et H' son dual topologique, i.e $H' = \{f: H \to \mathbb{K};\ \text{linéaire et continue}\}$,*

et soit $L: H \longrightarrow H$ une application linéaire. Montrer l'assertion suivante ;

$$L \text{ continue } \Leftrightarrow [\forall f \in H', f \circ L \text{ continue}].$$

2. On considère l'application linéaire $T: H \longrightarrow H$ vérifiant

$$\forall x, y \in H;\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

En se servant de la question précédente, montrer que T est continue.

3. Soit $G = \{P,\ P \text{ polynôme sur } \mathbb{C}\}$. On munit G du produit scalaire défini par ;

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\,\overline{Q(t)}dt.$$

Soit $F = \{P \in G; P(1) = P(0) = 0\}$ un sous-espace de G.

On définit l'application $T: F \longrightarrow G$ par $T(P) = iP'$ où $i^2 = -1$.

a. Vérifier que T est linéaire.

b. Montrer que pour tous $P, Q \in F$: $\langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$.

c. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(t) = t^n - t^{n+1}$.

- *Vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*; P_n \in F$.*
- *Calculer $\|P_n\|^2$, $\|P_n'\|^2$ et $\lim_{n\to\infty} \|P_n'\|/\|P_n\|$.*

d. En déduire que T n'est pas continue.

e. Comparer ce résultat avec celui de 2.

Barème: *Exercice 1: 7 pts* *Exercice 2: 7 pts* *Exercice 3: 6pts*

Bonne Chance

Corrigé détaillé

Exercice 1: *Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $A \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur coercive, ie ;* $\exists \gamma > 0, \forall x \in E;\ |\langle Ax, x\rangle| \geq \gamma \|x\|^2$.

1. *Montrons que,* $\forall x \in E$; $\|Ax\| \geq \gamma \|x\|$. **(1pt)**
   On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in E$
   $$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\|.$$
   En utilisant la coercivité de A, on écrit
   $$\|Ax\|\|x\| \geq \gamma \|x\|^2,$$
   d'où $\|x\|(\|Ax\| - \gamma\|x\|) \geq 0$ *et par suite* $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|, \forall x \in E$.
   Montrer que A est injectif revient à montrer, à cause de la linéarité, que $KerA = \{0\}$.
   On a
   $$x \in KerA \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow 0 = \|Ax\|.$$
   Et d'après ce qui précède on obtient, $0 = \|Ax\| \geq \gamma\|x\| \geq 0$ *car* $\gamma > 0$, *d'où* $x = 0$, *donc* $KerA = \{0\}$ *et A est injectif.* **(1pt)**
2. *L'opérateur A étant injectif, donc* $A: E \longrightarrow A(E)$ *est bijectif puisqu'il est surjectif.*
   Ainsi l'opérateur $A^{-1}: A(E) \longrightarrow E$ *est bien défini.*
   Montrons qu'il est continu. **(1pt)**
   Soit $y \in A(E)$, *alors il existe* $x \in E$ *tel que* $y = Ax$, *et on a*
   $$\| A^{-1}(y)\| = \| A^{-1}(Ax)\| = \|x\| \leq \gamma^{-1}\|Ax\| = \gamma^{-1}\|y\|.$$
   Ainsi $\| A^{-1}(y)\| \leq \gamma^{-1}\|y\|, \forall y \in A(E)$.
   Ceci montre que A^{-1} *est continu et* $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$. **(1pt)**
3. *Montrons que* $A(E)$ *est fermé dans* E. **(1pt)**
   1e Méthode: *L'espace E est complet il suffit alors de montrer que* $A(E)$ *est complet. l'opérateur A réalise un isomorphisme (bicontinu !) entre* $A(E)$ *et l'espace complet E, donc* $A(E)$ *est complet, et par suite il est fermé dans E.*
   2e Méthode: *On montre, en utilisant les suites, qu'il est fermé.*
   Soit $(Ax_n)_n$ *une suite de* $A(E)$ *convergeant vers un élément* $y \in E$.
   Montrons que $y \in A(E)$.
   La suite $(Ax_n)_n$ *est à priori une suite de Cauchy dans E, donc*
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ p, q > N \Longrightarrow \|Ax_p - Ax_q\| < \varepsilon.$$
   En utilisant la 1e question, on écrit
   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N};\ p, q > N \Longrightarrow \|x_p - x_q\| < \gamma^{-1}\varepsilon.$$
   $$(car\ \|Ax_p - Ax_q\| = \|A(x_p - x_q)\| \geq \gamma\|x_p - x_q\|.)$$
   Ainsi la suite $(x_n)_n$ *est de Cauchy dans l'espace complet E, donc converge vers un élément* $x \in E$.
   La continuité de A nous permet d'écrire que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} Ax_n = Ax$.
   Par unicité de la limite nous avons, $y = Ax \in A(E)$, *et par conséquent* $A(E)$ *est fermé.*

Remarque:

Nous venons de montrer, en parallèle, que $A(E)$ *est complet, car la suite* $(Ax_n)_n$ *est de Cauchy dans* $A(E)$ *qui converge vers* $Ax \in A(E)$.

4. *Montrons que* $A(E)^{\perp} = \{0\}$. **(1pt)** *On a*

$$z \in A(E)^{\perp} \Leftrightarrow [\langle z, y\rangle = 0, \quad \forall y \in A(E)] \Leftrightarrow [\langle z, Ax\rangle = 0, \quad \forall x \in E].$$

En prenant en particulier $x = z$, *nous obtenons*

$$\langle z, Az\rangle = 0,$$

en utilisant la coercivité de A, nous écrivons, $0 \geq \gamma\|z\|^2$ *d'où* $z = 0$ *et* $A(E)^{\perp} = \{0\}$.

Montrons que A est inversible: **(1pt)**

On a, $E = \overline{A(E)} \oplus A(E)^{\perp} = A(E)$ *car* $A(E)$ *est fermé et* $A(E)^{\perp} = \{0\}$.

Donc A est inversible puisque $A(E) = E$.

Exercice 2: *Soient* $\Omega =]0, \ L[\ (L > 0)$ *et* $H^1(\Omega)$ *l'espace de Sobolev défini par*

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \quad v' \in L^2(\Omega)\}.$$

$H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire :* $\langle v, w\rangle = \int_0^L v(x)\, w(x)dx + \int_0^L v'(x)\, w'(x)dx$,

et de la norme associée donnée par: $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

1. *Soit* $G = \{v \in H^1(\Omega), \ v(0) = 0\}$.

a. *Montrons que G est un sous-espace de Hilbert de* $H^1(\Omega)$. **(1pt)**

$H^1(\Omega)$ *étant complet, il suffit de montrer que G est fermé.*

G est caractérisé par : $\forall v \in H^1(\Omega); \quad v \in G \Leftrightarrow v(0) = 0$.

Considérons la forme linéaire $\varphi: H^1(\Omega) \to \mathbb{R}, \ v \longmapsto v(0)$.

Montrons que φ *est continue: On a*

$$\varphi(v) = v(0) = \int_0^L \left(\frac{x-L}{L} v(x)\right)' dx = \int_0^L \left(\frac{1}{L} v(x) + \frac{x-L}{L} v'(x)\right) dx,$$

d'où

$$|\varphi(v)| \leq \frac{1}{L}\int_0^L |v(x)|dx + \int_0^L \left|\frac{x-L}{L} v'(x)\right| dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$*!), on obtient*

$$|\varphi(v)| \leq \frac{1}{\sqrt{L}}\|v\|_{L^2} + \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{3}}\|v'\|_{L^2} \leq \max\left(\frac{1}{\sqrt{L}}, \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{3}}\right)(\|v\|_{L^2} + \|v'\|_{L^2}) = C_L\|v\|_{H^1};$$

avec $C_L = \max\left(\frac{1}{\sqrt{L}}, \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{3}}\right)$. *Ainsi* φ *est continue.*

On a $G = \{v \in H^1(\Omega), \ \varphi(v) = 0\} = Ker\ \varphi$.

G est le noyau d'une forme linéaire continue, il est donc fermé et par suite complet car inclus dans $H^1(\Omega)$ *qui est complet.*

b. *Montrons que ;* $\forall v \in G, \|v\|_{L^2} \leq L\|v'\|_{L^2}$. **(1pt)**

Pour $v \in G$ *on a* $v(0) = 0$ *d'où*

$$|v(x)| = \left|\int_0^x v'(t)dt\right| \leq \int_0^x |v'(t)|dt \leq \int_0^L |v'(t)|dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on écrit

$$|v(x)| \leq \sqrt{L}\|v'\|_{L^2}, \quad \forall x \in]0, L[.$$

D'où

$$\int_0^L |v(x)|^2 dx \leq L\|v'\|_{L^2}^2 \int_0^L dx = L^2\|v'\|_{L^2}^2,$$

et par suite $\|v\|_{L^2} \leq L\|v'\|_{L^2}, \forall v \in G.$

***Conclusion:* (1pt)** *On a pour tout* $v \in G$, $\|v'\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2 \leq (L^2+1)\|v'\|_{L^2}^2$.

D'où, $\forall v \in G, \|v'\|_{L^2} \leq \|v\|_{H^1} \leq \sqrt{L^2+1}\, \|v'\|_{L^2}$.

Les normes $v \longmapsto \|v'\|_{L^2}$ *et* $v \longmapsto \|v\|_{H^1}$ *sont donc équivalentes sur G, et G peut-être équipé de la première norme.*

Munissons alors G de la norme $\|\,.\,\|_+$ *définie par* $\|v\|_+ = \|v'\|_{L^2}$.

2. *Soit* (P) *le problème suivant:*

$$\begin{cases} -(Au')' = kA \ \ sur \ \ ]0, \ \ L[\\ \qquad u(0) = u'(L) = 0, \end{cases}$$

où $k \in \mathbb{R}^*$ *et* $A \in C^2(\overline{\Omega})$ *telle que,* $\exists \beta > 0, \forall x \in [0, L];\ A(x) \geq \beta$.

a. *Montrons que la solution u de* (P) *vérifie l'équation variationnelle* (EV) *suivante:*

$$\forall v \in G, \quad \int_0^L A(x)u'(x)v'(x)\,dx = k\int_0^L A(x)v(x)\,dx.$$

Multiplions l'équation de (P) *par* $v \in G$ *et intégrons (par parties) sur* $[0, \ \ L]$, *en posant* $U' = (Au')'$ *et* $V = v$, *nous arrivons à ;*

$$[-A(x)u'(x)v(x)]_0^L + \int_0^L A(x)u'(x)v'(x)\,dx = k\int_0^L A(x)\,v(x)dx,$$

comme $u'(L) = v(0) = 0$, *nous obtenons l'équation demandée.* **(1pt)**

b. *Soit* $\mathcal{B}$ *la forme bilinéaire symétrique définie sur* $G \times G$ *par;*

$$\mathcal{B}(u, v) = \int_0^L A(x)u'(x)v'(x)\,dx.$$

- *Montrons que* $\mathcal{B}$ *est continue:* **(1pt)**
  Pour tous $u, \ v \in G$ *on a :*

$$|\mathcal{B}(u, \ v)| \leq \int_0^L |A(x)||u'(x)v'(x)\,|\,dx \leq \max_{0\leq x\leq L}|A(x)| \int_0^L |u'(x)v'(x)\,|\,dx$$

  en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\mathcal{B}(u, \ v)| \leq C_A\|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} = C_A\|u\|_+\|v\|_+,$$

  où $C_A = \max_{0\leq x\leq L}|A(x)|$. *La forme bilinéaire* $\mathcal{B}$ *est donc continue sur* $G \times G$.

- *Montrons que* $\mathcal{B}$ *est coercive :* **(1pt)**
  Pour tout $v \in G$ *on a :*

$$\mathcal{B}(v, v) = \int_0^L A(x)|v'(x)|^2\,dx \geq \beta\|v'\|_{L^2}^2 = \beta\|v\|_+^2,$$

  car $A(x) \geq \beta > 0;\ \forall x \in [0, L]$.

  D'où, $\mathcal{B}(v, v) \geq \beta\|v\|_+^2 \quad \forall v \in G.$ *Ce qui montre que* $\mathcal{B}$ *est coercive.*

c. Montrons que l'équation variationnelle (EV) admet une unique solution $u \in G$.
Il suffit d'appliquer le théorème de Lax-Milgram.
Reste à vérifier que la forme linéaire $l: G \longrightarrow \mathbb{R},\ v \longmapsto l(v) = k\int_0^L A(x)v(x)\,dx$,
est continue **(1 pt)**: *Pour tout $v \in G$ on a*

$$|l(v)| \leq |k| \int_0^L |A(x)v(x)|\,dx \leq |k|\|A\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq L|k|\|A\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}$$

d'où $|l(v)| \leq L|k|\|A\|_{L^2}\|v\|_+, \quad \forall v \in G$. La continuité de la forme l s'ensuit.
Toutes les conditions du théorème de Lax-Milgram sont alors vérifiées:

- *G est un espace de Hilbert,*
- *la forme bilinéaire symétrique $\mathcal{B}$ est continue et coercive sur $G \times G$,*
- *la forme linéaire l est continue sur G.*

Conclusion: D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un seul $u \in G$ tel que

$$\mathcal{B}(u, v) = l(v), \quad \forall v \in G,$$

c.-à-d. que l'équation variationnelle (EV) admet une unique solution $u \in G$. **(1pt)**

Exercice 3: *1. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), H' son dual topologique, $L: H \longrightarrow H$ une application linéaire. Montrons l'assertion suivante ;*

$$L \text{ continue } \Leftrightarrow [\forall f \in H', f \circ L \text{ continue}].$$

⇒) (0,5 pt) *Remarquons d'abord que $f \circ L$ est bien définie, c'est une forme linéaire sur H.*
Si L est continue alors il est évident que $f \circ L$ est continue, c'est la composée de deux applications continues !
On peut le voir autrement,

$$\forall x \in H, |f \circ L(x)| \leq \|f\|_{H'}\|L(x)\|_H \leq \|f\|_{H'}\|L\|_{\mathcal{L}(H)}\|x\|_H.$$

Ainsi, $\exists C > 0, \forall x \in H;\ |f \circ L(x)| \leq C\|x\|$,
avec $C = \|f\|\|L\|$, donc $f \circ L$ est continue.

⇐) (0,5pt) *Supposons maintenant que pour tout $f \in H'$, $f \circ L$ soit continue et montrons que L est continue. Soit alors (x_n) une suite de H convergeant vers x, montrons que $(L(x_n))$ converge vers $L(x)$.*
On sait par le théorème de représentation de Riesz que :

$$\forall f \in H', \exists!\, y \in H; f(z) = \langle z, y\rangle, \qquad \forall z \in H.$$

Maintenant de la continuité de $f \circ L$, on a $f \circ L(x_n) \longrightarrow f \circ L(x) \qquad (*')$
C'est à dire que $\langle L(x_n), y\rangle \longrightarrow \langle L(x), y\rangle \qquad (*)$
A remarquer que puisque $(*')$ est vraie pour tout $f \in H'$ alors $(*)$ est satisfaite pour tout $y \in H$.
Or la suite $(L(x_n))$ converge vers un élément $u \in H$, d'où $\langle L(x_n), y\rangle \longrightarrow \langle u, y\rangle, \forall y \in H$.
Par identification avec $(*)$ nous avons, $\langle L(x), y\rangle = \langle z, y\rangle, \forall y \in H$,
i.e $L(x) - z \in H^\perp = \{0\}$, d'où $z = L(x)$ et donc $L(x_n) \longrightarrow L(x)$, ceci montre que L est continue.

2. *Soit l'application linéaire* $T: H \longrightarrow H$ *vérifiant*

$$\forall x, y \in H;\ \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle.$$

Montrons que T *est continue. D'après la question précédente, il suffit de montrer que pour tout* $f \in H', f\circ T$ *est continue.*

Soit $f \in H'$, *on sait qu'il existe un unique* $y \in H$ *tel que* $f(x) = \langle x, y\rangle,\ \forall x \in H.$

D'où , pour tout $x \in H$, *on a d'après la propriété de* T *et l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|f\circ T(x)| = |\langle Tx, y\rangle| = |\langle x, Ty\rangle| \le \|Ty\|\|x\|.$$

Ce qui prouve que $f\circ T$ *est continue et par conséquent* T *est continue.* **(0,5 pt)**

3. *Soit* $G = \{P,\ P \text{ polynôme sur } \mathbb{C}\}$, *muni du produit scalaire;*

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\,\overline{Q(t)}dt.$$

et $F = \{P \in G; P(1) = P(0) = 0\}$ *un sous-espace de* G.

On considère $T: F \longrightarrow G$ *définie par* $T(P) = iP'$ *où* $i^2 = -1$.

a. *Vérifions que* T *est linéaire.* **(0,5 pt)**

$$\forall P, Q \in G, \forall \alpha \in \mathbb{C};\ T(P+\alpha Q) = i(P+\alpha Q)' = iP' + \alpha i Q' = T(P) + \alpha T(Q).$$

b. *Montrons que pour tous* $P, Q \in F$: $\langle T(P), Q\rangle = \langle P, T(Q)\rangle$. **(1 pt)**

$$\langle T(P), Q\rangle = i\int_0^1 P'(t)\,\overline{Q(t)}dt = i\left[\overline{Q(t)}P(t)|_0^1 - \int_0^1 P(t)\,\overline{Q(t)'}dt\right].$$

Comme $P(1) = P(0) = 0$ *et* $\bar{\imath} = -i$ *alors*

$$\langle T(P), Q\rangle = \int_0^1 P(t)\,\overline{\imath Q(t)'}dt = \langle P, T(Q)\rangle.$$

c. *Soit* $P_n(t) = t^n - t^{n+1},\ n \in \mathbb{N}^*$.

- *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$; $P_n(1) = P_n(0) = 0$, *d'où* $P_n \in F, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **(0,5 pt)**
- *On a,* **(0,5 pt)**

$$\|P_n\|^2 = \int_0^1 |P(t)|^2\,dt = \int_0^1 (t^{2n} - 2t^{2n+1} + t^{2n+2})\,dt = \frac{1}{(n+1)(2n+1)(2n+3)}$$

$$\|P_n'\|^2 = \int_0^1 |P'(t)|^2\,dt = \int_0^1 (n^2 t^{2n-2} - 2n(n+1)t^{2n-1} + (n+1)^2 t^{2n})\,dt$$

$$= \frac{n}{(2n+1)(2n-1)} \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|P_n'\|^2}{\|P_n\|^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+3)}{2n-1} = +\infty,\ \ d'\text{où}\ \ \lim_{n\to\infty} \frac{\|P_n'\|}{\|P_n\|} = +\infty. \quad \textbf{(0,5 pt)}$$

On remarque que le rapport $\frac{\|P_n'\|}{\|P_n\|}$, *qui n'est autre que* $\frac{\|T(P_n)\|}{\|P_n\|}$ *n'est pas borné, à partir d'un certain rang N, i.e*

$$\forall C > 0; \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Longrightarrow\ \ \|T(P_n)\| > C\|P_n\|.$$

Donc T *n'est pas bornée, et par suite n'est continue.* **(0,5 pt)**

d. **(0,5 pt)** *Le résultat de la question 2 ne s'applique pas si l'espace sur lequel l'opérateur* T *est défini n'est pas au moins complet. Remarquer que le sous-espace préhilbertien* F *n'est pas complet.*