Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2017/2018.
Janvier 2018
Optimisation sans contraintes. (L3-S5)

Epreuve finale

(durée : 01h 45mn)

Questions de Cours [**3pts**]

1) f étant une fonction strictement convexe sur un espace vectoriel E, montrer que si f admet, au moins, un minimum dans E alors celui-ci est unique. (**1pt**)

2) E étant un **R**-espace de Hilbert, U ouvert dans E et C convexe fermé inclus dans U, **f** : E $\to$ **R** une fonction une fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) dans U. Montrer que si **f** est **convexe** sur C alors
   a) $x_0 \in C$ et $\forall x \in C \ \langle f'(x_0), x - x_0 \rangle_E \geq 0 \Rightarrow x_0$ solution optimale de : $\inf\limits_{x\in C} f(x)$. (**1pt**)
   b) $x_0 \in C=U=E$ et $f'(x_0) = 0_E \Rightarrow x_0$ solution optimale du pb d'optimisation : $\inf\limits_{x\in E} f(x)$. (**1pt**)

   Rappel :Voir ***Rappel1*** dans **Rappels utiles** à la fin du sujet (voir au verso).

Exercice 1 [**8pts**]

Dans $\mathbf{R}^n$, $\langle \ , \ \rangle_n$ désigne le produit scalaire euclidien et on considère la matrice carrée H d'ordre **n**.

1) Montrer que $\forall \ (x , y) \in \mathbf{R}^n \mathrm{x} \mathbf{R}^n$ on a $\langle Hx , y \rangle_n = \langle x , H^T y \rangle_n$ et $\langle x , Hy \rangle_n = \langle H^T x , y \rangle_n$. (**1pt**)

2) On introduit alors la fonctionnelle **f** définie sur $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{f}(x) = \|Bx - c\|_n^2$ où $\| . \|_n$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^n$, B matrice carrée d'ordre **n inversible** et **c** est un vecteur de $\mathbf{R}^n$.
   a) Montrer que **f** peut s'écrire sous la forme : $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2}\langle A x , x \rangle_n - \langle c' , x \rangle_n + d$

      où il faudra préciser la matrice A, le vecteur de $\mathbf{R}^n$: **c'** et la constante réelle d. (**1.5pts**)
   b) Montrer alors que **f** est une fonctionnelle quadratique (A symétrique). (**0.5pt**)

   c) Montrer que A est définie positive et déduire que **f** est **strictement** convexe et coercive. (**2.5pts**)
   Rappel : Dans $\mathbf{R}^n$, pour une fonctionnelle quadratique **f** (voir question 2)-a)), la dérivée directionnelle d'ordre 1 de **f** s'écrit comme suit : ∇ **f**(x) = grad **f**(x) = Ax – **c'** et Hess**f**(x) = A.
   Voir aussi les rappels à la fin du sujet : Notamment ***Rappel4*** .

   d) Montrer alors que :
      d1) le problème d'optimisation sans contraintes ($\mathbf{P_n}$) : $\min\limits_{x\in R^n} f(x)$ admet une solution unique (sans la déterminer) notée x*. (**1pt**)

      d2) Montrer l'équivalence suivante : x* solution optimale de ($\mathbf{P_n}$) $\Leftrightarrow$ x* vecteur-solution du système linéaire Bx = **c''** où **c''** est un vecteur de $\mathbf{R}^n$ qu'il faudra préciser. (**1pt**)

      d3) résoudre alors le problème ($\mathbf{P_n}$) en explicitant x* en fonction des données du problème initial c.àd. en fonction de la matrice symétrique B^TB, du vecteur **c** et éventuellement du scalaire d. (**0.5pt**)
      Rappels pour **d1)**, **d2)** et **d3)** : B inversible $\Rightarrow B^T$ inversible et son inverse est tout simplement (B^{-1} $)^T$.
      Voir aussi les rappels à la fin du sujet : Notamment ***Rappel3*** et ***Rappel4*** .

Exercice2 [**9.5pts**]

Dans tout ce qui suit E= **R** et C un intervalle ouvert connexe (donc convexe) de **R** .

1) **f** étant une fonction de **R** dans **R**, 2 fois continûment dérivable sur C, montrer alors que **f** est convexe sur C si et seulement si $\forall \ x \in C$ **f''**(x) $\geq$ 0 (Ici **f''** := $\mathbf{f}^{(2)}$) et si $\forall \ x \in C$ **f''**(x) > 0 alors **f** est strictement convexe sur C. (**1pt**). *Indication* : Utiliser le ***Rappel2*** ci-dessous.

2) Utilisant 1) montrer que la fonction : $x \to \sqrt{x}$ n'est pas convexe sur C = R_+^* =]0 , + ∞ [. (**0.5pt**)

3) Utilisant 1) montrer que la fonction **g** : $x \to$ **g**$(x) = x\sqrt{x}$ est convexe sur $C = R_+^*$ après avoir montré que la fonction identique : $x \to x$ est convexe sur $C = R_+^*$. (**1pt**)
4) Que peut-on en conclure au sujet de la convexité de **g** produit de deux fonctions l'une convexe et l'autre non convexe sur $C = R_+^*$? (**0.5pt**)
5) **g** est-elle strictement convexe sur C ? justifier la réponse donnée. (**0.5pt**)
6) Résoudre le problème de minimisation de **g** sur $\overline{C}$ = $\mathbf{R}^+$ = [0 , + ∞ [. (**1pt**)
7) Utilisant 1) montrer que les 2 fonctions $f_1 : x \to f_1(x) = -x$ et $f_2 : x \to f_2(x) = 1/x^2$ sont convexes sur C. (**1pt**)
8) On définit alors la fonction produit $f = f_1.f_2$. Est-elle convexe sur $C = R_+^*$? justifier. (**0.5pt**)
9) Que peut-on en conclure alors au sujet de la fonction produit : $f = f_1.f_2$? (**0.5pt**)
10) Utilisant 1), montrer que si une fonction **f** est définie, continue et deux fois continûment dérivable sur R_+^* à valeurs dans **R** (**f** pas forcément convexe sur C) alors on a l'implication suivante :

$g : x \to g(x) = x\,\mathbf{f}(x)$ est **convexe** sur $]0,+\infty[$ $\Rightarrow$ la fonction $h : x \to h(x) = \mathbf{f}(1/x)$ est **convexe** sur $]0,+\infty[$. (**1pt**)

11) Utilisant 10) montrer que $h : x \to h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est convexe sur $]0,+\infty[= R_+^*$. (**1pt**)
12) Déterminer SO : l'ensemble des solutions optimales du pb d'optimisation $\inf\limits_{x\in C} h(x)$ où $C = R_+^*$.(**0.5pt**)

Rappels utiles

Rappel1 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert de E et C convexe inclus dans U, alors si **f** : E $\to$ **R** est une fois dérivable (au sens de la **dérivée directionnelle**) dans U, on a les résultats suivants :

- **f est convexe sur C** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ \langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle_E \geq 0$.
  $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle_E$
- **f est strictement convexe** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ avec $x \neq y \ \langle f'(x) - f'(y), x - y\rangle_E > 0$.
  $\Leftrightarrow \forall x, y \in C$ avec $x \neq y \ f(y) > f(x) + \langle f'(x), y - x\rangle_E$

Rappel2 : E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert de E et C convexe inclus dans U, alors si **f** : E $\to$ **R** est deux fois dérivable (au sens de la **dérivée directionnelle**) dans U, on a les résultats suivants :

- **f est convexe sur C** $\Leftrightarrow \forall x, y \in C \ f''(x)(y - x, y - x) \geq 0$.
- Si $\forall x, y \in C$ avec $x \neq y$ on a $f''(x)(y - x, y - x) > 0$ alors **f est strictement convexe**.

Rappel3 : **Conditions d'optimalité**.
E étant un R-esp. de Hilbert, U ouvert dans E et C convexe fermé inclus dans U, alors si f : E $\to$ **R** est **convexe** et une fois dérivable (au sens de la dérivée directionnelle) dans U, une condition nécessaire est suffisante pour que x $\in$ C soit solution optimale du problème d'optimisation : $\inf\limits_{y\in C} f(y)$ est : $\forall y \in C \ \langle f'(x), y - x\rangle_E \geq 0$. C'est l'inéquation d'Euler.
Dans le cas sans contraintes (C = U = E), une condition nécessaire est suffisante pour que x $\in$ E soit solution optimale du problème d'optimisation **sans** contraintes : $\inf\limits_{y\in E} f(y)$ est : $f'(x) = 0_E$. C'est l'équation d'Euler.

Rappel4 : **Coercivité et optimalité**.
E étant un R-esp. normé de dimension finie, alors si f : E $\to$ **R** est **continue** et **coercive** (c'est-à-dire $\lim\limits_{\|x\|_E \to \infty} f(x) = +\infty$), la fonction f admet, dans ce cas, **au moins un minimum** sur E.
Si de plus f est **strictement convexe** alors ce minimum est unique.

Corrigé de l'épreuve finale

Questions de Cours

1) f strict. convexe sur E ($\mathbb{R}$-esp. vect.), f admet, au moins, un minimum ds E (c.à d. $SO \neq \emptyset$ SO étant l'ens. des solutions optimales de : $\alpha = \inf_{x\in E} f(x)$)

Supposant que f admet 2 minima ds E : x_1 et x_2 c.àd. $f(x_1) = f(x_2) = \alpha := \inf_{x\in E} f(x)$

f étant strict. convexe $\Rightarrow f$ convexe $\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]$ $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ est aussi minimum de f sur E : $\lambda = \frac{1}{2}$ $f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) = \alpha = f(x_1) = f(x_2)$

or f strict. convexe $\Rightarrow \alpha = f(1/2\, x_1 + 1/2\, x_2) < 1/2\, f(x_1) + 1/2\, f(x_2) = 1/2\, \alpha + 1/2\, \alpha = \alpha$ ($\alpha < \alpha$)

c'est une antilogie qui prouve que le minimum est unique.

2) E $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert, $\underset{\text{ouvert}}{U \subset E}$, $\underset{\text{convexe}}{C \subset} U \subset E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fois dérivable au sens de la dérivée directionnelle ds U ($\forall x \in U$ $f'(x)$ existe). Si f est convexe sur C alors :

a) $x_0 \in C$ et $\forall x \in C$ $\langle f'(x_0), x - x_0\rangle_E \geq 0$ et puisqu'on a $\forall x', y \in C$ $f(y) \geq f(x') + \langle f'(x'), y - x'\rangle$ car f convexe sur C alors on peut poser $x_0 = x'$ et $x = y$ ds cette dernière inégalité pour obtenir : $f(x) \geq f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0\rangle_E \geq f(x_0)$ $\forall x \in C \Rightarrow f(x_0) = \inf_{x\in C} f(x)$ car $x_0 \in C$ aussi. Ce qui prouve que x_0 sol. opt. de $\inf_{x\in C} f(x)$

b) De même $x_0 \in E$ et $f'(x_0) = 0_E$: f étant convexe sur $E \Rightarrow \forall x \in E$ $f(x) \geq f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0\rangle_E$ c.à d. $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in E$ (car $f'(x_0) = 0_E \Rightarrow \langle f'(x_0), x - x_0\rangle_E = 0$) ce qui prouve que $f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x)$ c.à d. x_0 sol. opt. du pb d'optimisation $\inf_{x\in E} f(x)$

Exercice 1. Ds $\mathbb{R}^n$, H matrice carrée d'ordre n.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle Hx, y\rangle_n = (Hx)^T y = x^T(H^T y) = \langle x, H^T y\rangle_n$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ $\langle x, Hy\rangle_n = x^T(Hy) = x^T(H^T)^T y = (H^T x)^T y = \langle H^T x, y\rangle_n$

2) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = \|Bx - c\|_n^2$ où B matrice carrée d'ordre n inversible et $c \in \mathbb{R}^n$.

a) $f(x) = \langle Bx - c, Bx - c\rangle_n = \langle Bx, Bx\rangle_n - \langle c, Bx\rangle_n - \langle Bx, c\rangle_n + \langle c, c\rangle_n$

$= \langle B^T Bx, x\rangle_n - 2\langle c, Bx\rangle_n + \|c\|_n^2 = \frac{1}{2}\langle 2B^T Bx, x\rangle_n - 2\langle B^T c, x\rangle_n + \|c\|_n^2$

Donc $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n - \langle c', x\rangle_n + d$ où $\boxed{A = 2B^T B}$, $\boxed{c' = 2B^T c}$ et $\boxed{d = \|c\|_n^2}$

b) f est quadratique si A est symétrique : $A^T = (2B^T B)^T = 2B^T(B^T)^T = 2B^T B = A$

c) Utilisant la déf. de base de la définie-positivité d'une matrice, on montre aisément que $A := 2B^T B$ est définie-positive : En effet, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ $x^T A x = x^T(2B^T B)x$

$= 2(Bx)^T(Bx)$

$= 2\langle Bx, Bx\rangle_n$

$= 2\|Bx\|_n^2$

Donc $x^T A x = 2\|Bx\|_n^2 > 0$ si $x \neq 0_n$ car B est inversible et par suite si $x \neq 0_n \Rightarrow Bx \neq 0_n$ car si $Bx = 0_n$ (avec $x \neq 0_n$) $\Rightarrow x = 0_n$

On en conclut alors que A est définie-positive

f est strictement convexe car $\mathrm{Hess}f(x) = A$ définie positive.

f coercive ssi, par définition, $f(x) \longrightarrow +\infty$ qd $\|x\|_n \to \infty$.

$0_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ fois}})^T$ origine de $\mathbb{R}^n$

En effet, $f(x)=\frac{1}{2}\|x\|_A^2-\langle c',x\rangle_n+d$ où $\|x\|_A=\sqrt{\langle Ax,x\rangle_n}=\left(x^TAx\right)^{1/2}$ norme vectorielle

Comme $\langle c',x\rangle_n\leq|\langle c',x\rangle_n|\leq\|c'\|_n\|x\|_n$ | Subordonnée (à A déf.-positive) équivalente à $\|\cdot\|_n$ c.à d. $\exists C_1,C_2>0 / \forall x\in\mathbb{R}^n$ $C_1\|x\|_n\leq\|x\|_A\leq C_2\|x\|_n$

$\Rightarrow -\langle c',x\rangle_n\geqslant-\|c'\|_n\cdot\|x\|_n$

et $\|x\|_A^2\geqslant C_1^2\|x\|_n^2$ on a $f(x)\geqslant\frac{C_1^2}{2}\|x\|_n^2-\|c'\|_n\|x\|_n+d=\|x\|_n\left(\frac{C_1^2}{2}\|x\|_n-\|c'\|_n\right)+d$

Donc $f(x)\longrightarrow+\infty$ qd $\|x\|_n\to\infty$. $\qquad\longrightarrow+\infty$ qd $\|x\|_n\to\infty$

d) (P_n): $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n}f(x)$ $\boxed{\text{Rem.}}$ Ds la quest. d1) ci-dessous 1/4 pt = 0,25 pt pour quiconque qui montre la continuité de f : c'est 1 combinaison linéaire de composées de fctions continues: $x\mapsto\|x\|_A$, $t\to t^2$, $x\mapsto\langle c',x\rangle$

d1) (P_n) admet une sol. optimale unique x^* car sa fction objective f est continue sur $\mathbb{R}^n$ (par rapport à la norme $\|\cdot\|_A$ ou la norme euclidienne $\|\cdot\|_n$ ou par rapport à n'importe quelle norme équivalente), coercive et strictement convexe (Voir Rappel 4).

d2) D'après Rappel 3: x^* sol. optimale de $(P_n)\Leftrightarrow\nabla f(x^*)=Ax^*-c'=O_n=(0,\dots,0)^T$

$$\Leftrightarrow Ax^*=c'\Leftrightarrow 2B^TBx^*=2B^Tc\Leftrightarrow Bx^*=c$$

Donc x^* sol. opt. de $(P_n)\Leftrightarrow x^*$ sol. du syst. lin $Bx=c''=c$.

d3) $Ax^*=c'\Leftrightarrow B^TBx^*=B^Tc\Leftrightarrow\boxed{x^*=(B^TB)^{-1}B^Tc}$

Il est plus interessant d'exprimer x^* en fction de B^TB (plus exactement de $(B^TB)^{-1}$) au lieu de B tout seul ou B^T tout seul (plus exactement de B^{-1} ou de $(B^T)^{-1}=(B^{-1})^T$) car il est plus facile d'inverser B^TB (sym. déf. positive) que d'inverser B ou B^T.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}$, C est un intervalle ouvert convexe, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

1) f deux fois continûment dérivable sur C : f convexe sur $C\Leftrightarrow\forall x,y\in C$ $f''(x)(y-x,y-x)\geqslant0$

Or la dérivée directionnelle dans $\mathbb{R}$ coincide avec la dérivée classique:

$\forall x\in C\subset\mathbb{R}$ $f''(x)\in\mathbb{R}$ et $f''(x)(y-x,y-x)=f''(x)(y-x)^2\geqslant0\Leftrightarrow f''(x)\geqslant0$ $\forall x\in C$

car $(y-x)^2\geqslant0$ $\forall x,y\in C$. Donc f convexe sur $C\subset\mathbb{R}\Leftrightarrow f''(x)\geqslant0$ $\forall x\in C$.

De m̂, ds le cas général, si $\forall x,y\in C$ t.q. $x\neq y$ on a $f''(x)(y-x,y-x)>0\Rightarrow f$ strict. convexe sur C

Or ds $\mathbb{R}$ $f''(x)(y-x,y-x)=f''(x)(y-x)^2>0\Leftrightarrow f''(x)>0$ $\forall x\in C$

car $(y-x)^2>0$ si $y\neq x$. Donc si $f''(x)>0$ $\forall x\in C$ alors f est strict. convexe sur C.

2) $C=\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}=\frac{-1}{x\sqrt{x}}<0$ $\forall x\in C$.

Donc d'après 1) f n'est pas convexe sur C.

3) $C=\mathbb{R}_+^*$ $id: x\to x$ est convexe sur $\mathbb{R}\supset C$ car $id'(x)=1$ et $id''(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}\supset C$

$g(x)=x\sqrt{x}=x\,x^{1/2}=x^{3/2}\Rightarrow g'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\Rightarrow g''(x)=\frac{3}{4}x^{-1/2}=\frac{3}{4\sqrt{x}}>0$ $\forall x\in C$

Donc d'après 1) g est convexe sur C

4) On en conclut que la fonction produit g peut être convexe sans que l'un de ses facteurs ne soit convexe: $g=Id\cdot f$ où $Id(x)=x$ convexe et $f(x)=\sqrt{x}$ non convexe.

g est convexe bien que f ne soit pas convexe.

5) D'après 3) $g''(x)=3/4\sqrt{x}>0$ $\forall x\in C\xrightarrow{1)}g$ strict. convexe sur C.

6) $\forall x\in\overline{C}=\mathbb{R}^+$ $g(x)=x\sqrt{x}\geqslant0$ et $x=0$ $g(0)=0$, $x\neq0\Rightarrow g(x)>0$ donc $x_{opt}=0\in\overline{C}=\mathbb{R}^+$

c.à d. 0 est sol. opt. de (P_g): $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^+=[0,+\infty[}g(x)$ $\quad$ Rem. Ici il faut pas utiliser l'équation d'Euler car $x_{opt}=0\notin int(\overline{C})=C$ et $\overline{C}\neq\mathbb{R}$

7) $f_1 : x \mapsto f_1(x) = -x$ $f_1'(x) = -1$ $f_1''(x) = 0 \Rightarrow f_1$ convexe sur $C = \mathbb{R}_+^*$

$f_2 : x \mapsto f_2(x) = 1/x^2 \Rightarrow f_2'(x) = -2x^{-3} = -2/x^3 \Rightarrow f_2''(x) = (-2)(-3)x^{-4} = 6/x^4 > 0 \ \forall x \in C$

$\Rightarrow f_2$ strict. convexe sur $C \Rightarrow f_2$ convexe sur C.

8) $f = f_1 f_2 : x \mapsto f(x) = f_1(x) f_2(x) = (-x)(1/x^2) = -1/x \Rightarrow f'(x) = -(-1/x^2) = 1/x^2 = x^{-2}$

$\Rightarrow f''(x) = -2x^{-3} = -2/x^3 < 0 \ \forall x \in C \Rightarrow f$ n'est pas convexe sur C.

9) On en conclut alors que la fction produit $f = f_1 . f_2$ n'est pas convexe bien que les 2 facteurs f_1 et f_2 soient convexes (sur $C = \mathbb{R}_+^*$)

10) $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ et $g : x \mapsto g(x) = x f(x)$ convexe sur $C = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$

c.à.d. $g''(x) \geq 0 \ \forall x \in C$ or $g'(x) = f(x) + x f'(x) \Rightarrow g''(x) = f'(x) + x f''(x) + f'(x)$

$= 2f'(x) + x f''(x)$

On a donc $\forall x \in C \ (\forall x > 0) \ 2f'(x) + x f''(x) \geq 0$

Pour montrer que $h : x \mapsto h(x) = f(1/x)$ est convexe sur C, il suffit de montrer que $h''(x) \geq 0 \ \forall x > 0 \ (\forall x \in C)$.

En effet, $h'(x) = f'(1/x)(-1/x^2) \Rightarrow h''(x) = f''(1/x)(-1/x^2)(-1/x^2) + f'(1/x)(2/x^3)$

$= \frac{2}{x^3} f'(1/x) + \frac{1}{x^4} f''(1/x)$

Ds l'expression de $g''(x)$, on pose $t = \frac{1}{x}$

$t > 0$ car $x > 0$

Donc $g''\left(\frac{1}{t}\right) = 2 f'(1/t) + \frac{1}{t} f''(1/t) \geq 0 \ \forall t > 0 \Rightarrow \frac{1}{t^3} g''\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t^3} f'(1/t) + \frac{1}{t^4} f''(1/t) \geq 0 \ \forall t > 0$

Or $h''(t) = \frac{2}{t^3} f'(1/t) + \frac{1}{t^4} f''(1/t) = \frac{1}{t^3} g''\left(\frac{1}{t}\right) \geq 0 \ \forall t > 0$ c.à.d. $\forall t \in C$

Donc h convexe sur C.

11) $h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}}$. Si on pose $f(x) = \sqrt{x}$ alors $h(x) = f(1/x)$

Or d'après 3) $g : x \mapsto g(x) = x\sqrt{x} = x f(x)$ convexe sur $C \overset{10)}{\Longrightarrow} h$ convexe sur C

12) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^* = C =]0, +\infty[$ et $h(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow h$ est minimale au voisinage de $+\infty$

Donc le min de h n'est jamais atteint dans C ($+\infty \notin C$)

<u>Conclusion</u> : $SO = \emptyset$.