Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2017/2018.
Décembre 2017.
Optimisation sans contraintes. (L3-S5)

Epreuve de contrôle continu

(Durée : 01 h 45 mn)

1) **E** étant un **R**_espace vectoriel, A et B deux points de **E** alors :
   a) Montrer que le singleton $\{A\}$ est un convexe de **E**. (**0.5pt**)
   b) Définir la droite passant par les deux points A et B dans **E** : $D_{A,B}$. (**0.5pt**)
   Montrer alors que $D_{A,B}$ est convexe dans **E**. (**1pt**)
   c) Définir le segment de droite $[A,B]$ dans **E** et montrer que c'est un convexe de **E**. (**1.5pts**)

2) Dans $\mathbf{R}^2$, A, B, C et D étant quatre points quelconques du plan,
   a) Montrer que le demi-plan fermé $\{(x,y) \in R^2 / \alpha x + \beta y \le \gamma \;\; \alpha, \beta, \gamma \in R\}$ est convexe dans $\mathbf{R}^2$. (**1pt**)
   b) Montrer que l'intersection de 2 demi-plans fermés est toujours convexe alors que, généralement, leur réunion ne l'est pas. (**1.5pts**)
   Indication : Pour cette dernière question, il suffit de préciser un contre-exemple.
   c) Utilisant l'intersection des convexes, montrer que le triangle fermé (ABC) est un convexe de $\mathbf{R}^2$.(**1.5pt**
   d) Montrer que ce n'est pas de même pour un quadrilatère fermé (A B C D) de $\mathbf{R}^2$. (**0.5pt**)
   Rappel : Un quadrilatère de $\mathbf{R}^2$ est un polygone à quatre côtés.
   Indication : On pourra montrer qu'un quadrilatère peut ne pas résulter d'une intersection de convexes.
   e) Etant données trois valeurs réelles positives a, b et c $\in \mathbf{R}^+$,
   e1) Déterminer l'enveloppe convexe des quatre points de $\mathbf{R}^2$: O = $(0,0)^T$, A = $(a,-a)^T$, B = $(b,b)^T$ et C= $(-c,c)^T$ selon une discussion sur les valeurs positives de a, b et c. (**4pts**)
   e2) On remplace le point A par A' = $(a,-2a)^T$ et on suppose que les trois valeurs a, b et c $\in \;]0,+\infty[$, déterminer alors **CO**({O, A', B, C}). (**1pt**)
   e3) On remplace, à présent, le point A par A'' = $(a\,,\,(-1/2)\,a)^T$ et on suppose tjrs que a, b et c > 0, déterminer alors **CO**({O, A'', B, C}). (**1pt**)
   Indication : Dans la question e), on pourra se contenter de réponses schématiques (figures géométriques) pour justifier les réponses données.

3) $\mathbf{g} : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ où **E** est un **R**-espace de Hilbert avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et a ,b $\in$ **E**.
   $y \to g(y) = \alpha + \langle b, y - a\rangle_E$
   a) Après avoir montré que l'application $y \to \langle b, y-a\rangle_E$ est affine sur E, montrer que **g** est convexe.(**1.5pts**)
   b) Soit **f** une fonction différentiable au sens de la dérivée directionnelle sur l'ouvert convexe C de E et à valeurs dans **R**. Utiliser le sup de fonctions convexes pour montrer que :
   $\forall x, y \in C \langle f'(x), y - x\rangle_E \le f(y) - f(x) \Rightarrow$ f convexe sur C. (**1.5pts**)
   Indication : Choisir α = **f**(x), b = **f** '(x) et a = x dans l'expression de la fonction **g**. Considérer ensuite le sup de **g** sur C.
   Rappel : Le supremum de fonctions convexes est convexe.

4) Montrer que si une fonction **f** est définie, continue et deux fois continûment dérivable sur]0 , + ∞ [= R_+^* à valeurs dans **R** alors la fonction :

   g : x → **g**(x) = x **f**(x) est **convexe** sur]0 , + ∞ [⇔ la fonction **h** : x → **h**(x) = **f** $\left(\frac{1}{x}\right)$ est **convexe** sur]0 , + ∞ [. (**3pts**)

Université Abou Bekr Belkaïd, Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année univ. 2017/2018
Décembre 2017
Optimisation sans contraintes (L3 - S5)

Corrigé de l'épreuve de contrôle continu

1) E un $\mathbb{R}$-esp. vect. et A, B deux pts de E :

a) $\{A\} \underset{\text{convexe}}{\subset} E$ car $A = \lambda A + (1-\lambda)A \ \forall \lambda \in [0,1]$

b) $D_{A,B} = \{X \in E / \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $X = \lambda A + (1-\lambda)B\} = \{\lambda A + (1-\lambda)B / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$X, Y \in D_{A,B}$, on montre alors que $\forall \theta \in [0,1]$ $\theta X + (1-\theta)Y \in D_{A,B}$ pour pouvoir montrer que $D_{A,B}$ convexe de E :

$$\left.\begin{array}{l} X \in D_{A,B} \Rightarrow \exists \lambda_x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } X = \lambda_x A + (1-\lambda_x)B \\ \text{et } Y \in D_{A,B} \Rightarrow \exists \lambda_y \in \mathbb{R} \text{ t.q. } Y = \lambda_y A + (1-\lambda_y)B \end{array}\right\} \Rightarrow \theta X + (1-\theta)Y = \theta[\lambda_x A + (1-\lambda_x)B] + (1-\theta)[\lambda_y A + (1-\lambda_y)B]$$

c.à d. $\theta X + (1-\theta)Y = [\theta\lambda_x + (1-\theta)\lambda_y]A + [\theta(1-\lambda_x) + (1-\theta)(1-\lambda_y)]B$

Si on pose $\theta_0 = \theta\lambda_x + (1-\theta)\lambda_y \in \mathbb{R}$ il suffit de m.q. $1-\theta_0 = \theta(1-\lambda_x) + (1-\theta)(1-\lambda_y)$

c.à d. $\theta_0 + (1-\theta_0) = \theta\lambda_x + (1-\theta)\lambda_y + \theta(1-\lambda_x) + (1-\theta)(1-\lambda_y) = \theta\underbrace{(\lambda_x + 1 - \lambda_x)}_{=1} + (1-\theta)\underbrace{(\lambda_y + 1 - \lambda_y)}_{=1}$
$= \theta + (1-\theta) = 1$

Ainsi $\theta X + (1-\theta)Y = \theta_0 A + (1-\theta_0)B \in D_{A,B}$ car $\theta_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow D_{A,B}$ convexe de E

c) $[A,B] = \{X \in E / \exists \lambda \in [0,1]$ t.q. $X = \lambda A + (1-\lambda)B\} = \{\lambda A + (1-\lambda)B / \lambda \in [0,1]\}$

$X, Y \in [A,B] \Rightarrow \exists \theta_x, \theta_y \in [0,1]$ t.q. $X = \theta_x A + (1-\theta_x)B$ et $Y = \theta_y A + (1-\theta_y)B$

$\theta \in [0,1]$ A-t-on $\theta X + (1-\theta)Y \in [A,B]$? oui puisque :

$\theta X + (1-\theta)Y = \theta[\theta_x A + (1-\theta_x)B] + (1-\theta)[\theta_y A + (1-\theta_y)B] = [\theta\theta_x + (1-\theta)\theta_y]A + [\theta(1-\theta_x) + (1-\theta)(1-\theta_y)]B$

Posant $\theta_0 = \theta\theta_x + (1-\theta)\theta_y \in [0,1]$ car c'est 1 combinaison convexe des 2 valeurs θ_x et θ_y de $[0,1]$ (puisque $\theta \in [0,1]$) alors $1-\theta_0 = \theta(1-\theta_x) + (1-\theta)(1-\theta_y) \in [0,1]$ aussi et par suite $\theta X + (1-\theta)Y = \theta_0 A + (1-\theta_0)B \in [A,B] \Rightarrow [A,B]$ convexe de E.

2) Dans $\mathbb{R}^2$, A, B, C et D 4 pts du plan :

a) Posant $D_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \alpha x + \beta y \leq \gamma \ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ et montrons que $D_p \underset{\text{convexe}}{\subset} \mathbb{R}^2$

$X, Y \in D_p$ A-t-on $\lambda X + (1-\lambda)Y \in D_p \ \forall \lambda \in [0,1]$? $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda$ et $(1-\lambda) \geq 0$

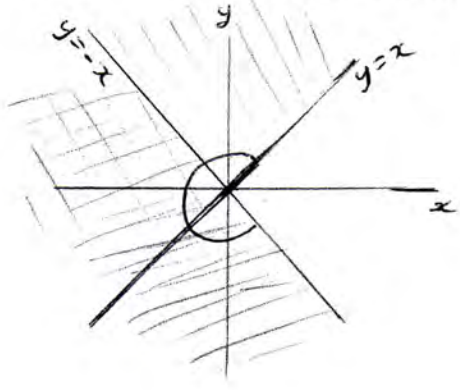
$$\left.\begin{array}{l} X \in D_p \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \leq \gamma \ (\text{où } X = (x_1, x_2)^T) \Rightarrow \lambda\alpha x_1 + \lambda\beta x_2 \leq \lambda\gamma \\ Y \in D_p \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2 \leq \gamma \ (\text{où } Y = (y_1, y_2)^T) \Rightarrow (1-\lambda)\alpha y_1 + (1-\lambda)\beta y_2 \leq (1-\lambda)\gamma \end{array}\right\} +$$

D'où $\alpha[\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1] + \beta[\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2] \leq \lambda\gamma + (1-\lambda)\gamma = \gamma$

Donc $\lambda X + (1-\lambda)Y = \lambda(x_1, x_2)^T + (1-\lambda)(y_1, y_2)^T \in D_p \Rightarrow D_p$ convexe de $\mathbb{R}^2$

b) D'après a) Un demi-plan fermé de $\mathbb{R}^2$ est 1 convexe de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ l'intersection de 2 demi-plans fermés de $\mathbb{R}^2$ est convexe.

La réunion de $D_{p_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \leq 0\}$ et $D_{p_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 0\}$ n'est pas convexe de $\mathbb{R}^2$ (Voir figure ci-contre).



c) Si $A=B=C$ alors $(ABC)=\{A\}=\{B\}=\{C\} \underset{\text{convexe}}{\subset} \mathbb{R}^2$ d'après 1) a)

0.5 C'est le triangle fermé dégénéré réduit à 1 pt de $\mathbb{R}^2$

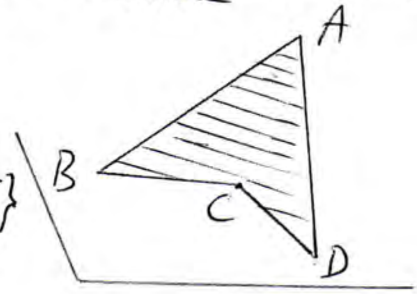
Si $A=B$ ou $A=C$ ou $B=C$ ou A, B et C sont alignés (portés par 1 même droite)

0.5 alors $(ABC)=[A,C]$ ou $[A,B]$ ou $[B,C] \underset{\text{convexe}}{\subset} \mathbb{R}^2$ d'après 1) c)

c'est tjrs le triangle dégénéré réduit à un segment fermé de $\mathbb{R}^2$

0.5 Si $A\neq B\neq C$ et $A\neq C$ alors il s'agit du triangle fermé non dégénéré résultant de l'intersection de 3 demi-plans fermés limités par les 3 droites $(A,B)=D_{A,B}$, $(A,C)=D_{A,C}$ et $(B,C)=D_{B,C} \Rightarrow (ABC) \underset{\text{convexe}}{\subset} \mathbb{R}^2$ (Voir 2) b))

d) En effet le quadrilatère ci-contre ne résulte pas de l'intersection de 4 demi-plans fermés et ce n'est pas un convexe.



e) e1) Si $a=b=c=0$ alors $CO(\{0,A,B,C\})=\{0\}=\{(0,0)^T\}$

Si $b=0$ et ($a\neq 0$ et $c\neq 0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=[A,C]$

$b=0$ et ($a=0$ et $c\neq 0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=[0,C]$

$b=0$ et ($a\neq 0$ et $c=0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=[0,A]$

Si $b\neq 0$ et ($a=0$ et $c=0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=[0,B]$

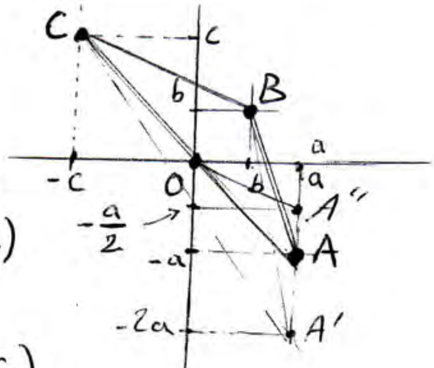
$b\neq 0$ et ($a\neq 0$ et $c=0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=(0AB)$

$b\neq 0$ et ($a=0$ et $c\neq 0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=(0BC)$

$b\neq 0$ et ($a\neq 0$ et $c\neq 0$) alors $CO(\{0,A,B,C\})=(ABC)$

e2) $A'=(a,-2a)^T$ remplace $A \Rightarrow CO(\{0,A',B,C\})=(A'BC)$

e3) $A''=(a,-\frac{1}{2}a)^T$ remplace $A \Rightarrow CO(\{0,A'',B,C\})=(0A''BC)$



3) $g: E \to \mathbb{R}$ E est un $\mathbb{R}$-esp. de Hilbert, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $a,b\in E$

$y \mapsto g(y)=\alpha+\langle b, y-a\rangle_E = \langle b,y\rangle_E + \alpha - \langle a,b\rangle_E$

a) Pour montrer que f est affine sur E, il suffit de montrer que g s'écrit sous la forme d'une somme de 2 fonctions : l'une linéaire et l'autre constante.

1pt En effet l'application $y\mapsto \langle b,y\rangle_E$ est linéaire sur E puisque le produit scalaire est bilinéaire et l'application $y\mapsto \alpha-\langle a,b\rangle_E$ est constante. On en conclut que g est affine sur E.

0.5 g étant affine sur $E \Rightarrow g$ convexe et concave sur $E \Rightarrow g$ convexe sur E

ou bien : montrer que g est convexe sur E en utilisant la définition :

$\forall \lambda\in[0,1]\ \forall x,y\in E\quad g(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$. (facile)

b) C ouvert convexe de E et f dérivable au sens de la dérivée directionnelle sur C à valeurs ds $\mathbb{R}$. On a alors $\forall x,y\in C\ \langle f'(x), y-x\rangle_E \leq f(y)-f(x)$

$\iff \forall x,y\in C\ f(x)+\langle f'(x),y-x\rangle_E \leq f(y) \Rightarrow \sup\limits_{x\in C}[f(x)+\langle f'(x),y-x\rangle_E]\leq f(y)\ \forall y\in C$

Par ailleurs $y\in C \Rightarrow \sup\limits_{x\in C}[f(x)+\langle f'(x),y-x\rangle_E] \geq f(y)+\langle f'(y), \underbrace{y-y}_{=0_E}\rangle_E = f(y)+0=f(y)$ (ceci $\forall y\in C$)

On en conclut que $f(y)=\sup\limits_{x\in C}[f(x)+\langle f'(x),y-x\rangle_E]\ \forall y\in C$

Ds a) si on pose $\alpha=f(x)$, $b=f'(x)$ et $a=x$ alors l'application affine :

$y\mapsto f(x)+\langle f'(x),y-x\rangle_E$ est convexe.

D'un autre côté, comme le suprémum de fonctions convexes est convexe (d'après le cours) alors la fction $f : y \in C \mapsto f(y) = \sup_{x \in C}[f(x) + \langle f'(x), y - x \rangle_E]$ est une fction convexe sur C.

4) f définie, continue et 2 fois continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ ($f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$) alors on montre que

$$g : x \mapsto g(x) = x f(x) \text{ est convexe} \Leftrightarrow h : x \mapsto h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ convexe}$$

"$\Rightarrow$" g est convexe sur $]0, +\infty[$ c.à.d. $g''(x) \geq 0 \ \forall x \in]0, +\infty[$

$g'(x) = f(x) + x f'(x) \Rightarrow g''(x) = f'(x) + x f''(x) + f'(x) = 2f'(x) + x f''(x)$.

On a donc $\forall x > 0 \ 2f'(x) + x f''(x) \geq 0$

Pour montrer que h est convexe, il suffit de montrer que $h''(x) \geq 0 \ \forall x > 0$

$$h'(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) \Rightarrow h''(x) = f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) + f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right)$$
$$= \frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ds l'expression de $g''(x)$ posons $t = \frac{1}{x} > 0$ qd $x > 0$

Donc $g''\left(\frac{1}{t}\right) = 2f'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t} f''\left(\frac{1}{t}\right) \geq 0 \ \forall t > 0 \Longrightarrow \frac{1}{t^3} g''\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t^3} f'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^4} f''\left(\frac{1}{t}\right) \geq 0$ car $t^3 > 0$ si $t > 0$

Mais, ds ce cas, $h''(t) = \frac{1}{t^3} g''\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t^3} f'\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^4} f''\left(\frac{1}{t}\right) \geq 0 \ \forall t > 0$

$\Rightarrow h$ convexe

"$\Leftarrow$" h convexe sur $]0, +\infty[$ c.à.d. $h''(x) \geq 0 \ \forall x \in]0, +\infty[$

c.à.d. $\frac{2}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \ \forall x > 0 \Longrightarrow \frac{2x^3}{x^3} f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x^3}{x^4} f''\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$ $\forall x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$

$\Rightarrow 2f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f''\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \ \forall x > 0$. Posant $t = \frac{1}{x}$ ds la dernière inégalité

$\forall x \in]0, +\infty[\ t \in]0, +\infty[$ et donc $2f'(t) + t f''(t) \geq 0 \ \forall t > 0$

$\Rightarrow g''(t) \geq 0 \ \forall t > 0 \Rightarrow g$ convexe.