Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3^e Année Licence - S5 — Décembre 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen Partiel — 1H30

***Exercice 1*:** *Soient E un espace de Hilbert et F un sous-espace de E.*

Montrer les propriétés suivantes:

1. $\bar{F}$ est complet. *2. $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.* *3. $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$.*

($\bar{F}$ étant l'adhérence de F et $F^{\perp}$ est son orthogonal.)

***Exercice 2*:** *Muni du produit scalaire donné par $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$, l'espace*

$$H = L^2([-1,1],\mathbb{R}) = \left\{ f:[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

est un espace de Hilbert.

On désigne par v la fonction valeur absolue et par e la fonction nulle.

1. *Soit l'application $\varphi: H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par,*

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,dx.$$

Montrer que φ est une forme linéaire continue et donner sa norme.

2. *On considère le sous-espace G de H défini par,*

$$G = \{g \in H;\ \ \langle v, g\rangle = 0\}.$$

a. *Vérifier que G est un sous-espace propre de H, c-à-d $\{e\} \subset G \subset H$ strictement.*

b. *Montrer que G est fermé. En déduire qu'il est complet.*

c. *Déterminer la projection de la fonction $h: x \longmapsto x+1$ sur G, et en déduire la distance de h à G.*

***Exercice 3*:** *On rappelle que les polynômes de Legendre P_n $(n \in \mathbb{N})$ sont définis par la formule suivante dite formule de Rodrigues :*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

et forment une base orthogonale de l'espace de Hilbert $H = L^2([-1,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

A. 1. *Calculer $P_n(1)$ et montrer que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. En déduire la parité de P_n.*

2. *Montrer que $P_{2n}(0) = (-1)^n\,(2n)!/\left(2^n(n!)\right)^2$.*

B. 1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$.*

2. *Développer en série de polynômes de Legendre la fonction f définie par,*

$$f(0) = 0 \ \text{ et } \ f(x) = \frac{x}{|x|} \ \text{ si } \ 0 < |x| \le 1.$$

Barème: *Exercice 1: 6 pts* *Exercice 2: 7 pts* *Exercice 3: 7pts*

Tourner la page

Université de Tlemcen Département de Mathématiques

3e Année Licence - S5 Décembre 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne Examen Partiel 1H30

Indications:

Les polynômes de Legendre vérifient les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n + nP_{n-1} = 0 \qquad (R)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad XP_n' - nP_n = P_{n-1}' \qquad (D)$$

Pour la question (A.2.) utiliser la relation (R).

Pour la question (B.1.) utiliser les deux relations.

A noter aussi que pour tout entier naturel n,

$$\|P_n\|^2 := \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Bonne chance

Corrigé détaillé

Exercice 1: *F est un sous-espace d'un espace de Hilbert E.*

1. *Montrons que $\bar{F}$ est complet:* ***(2pts)***
   - *Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de $\bar{F}$. Alors elle est aussi de Cauchy dans E.*
   E étant complet, donc la suite $(x_n)_n$ converge vers un élément $x \in E$.
   Comme $\bar{F}$ est fermé alors $x \in \bar{F}$. Ainsi $\bar{F}$ est complet.
   (Un fermé contient les limites de ses suites convergentes)
   - *On pouvait aussi dire, tout simplement, que $\bar{F}$ étant un fermé d'un espace complet E alors $\bar{F}$ est complet.*
2. *Montrons que $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$:* ***(2pts)***

Montrons d'abord que $F \subset F^{\perp\perp}$. Notons par $\langle .\,,\ .\rangle$ le produit scalaire de E.
Soit $x \in F$, alors $\langle x,\ y\rangle = 0,\ \ \forall y \in F^{\perp}$.
Mais; $\langle x,\ y\rangle = 0$ pour tout $y \in F^{\perp}$, implique que $x \in (F^{\perp})^{\perp} = F^{\perp\perp}$.
D'où $F \subset F^{\perp\perp}$.
On sait que l'orthogonal d'une partie est fermé, donc $F^{\perp\perp}$ est un fermé contenant F, comme $\bar{F}$ est le plus petit fermé contenant F alors $\bar{F} \subset F^{\perp\perp}$.

3. *Montrons que $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$:* ***(2pts)***

$\bar{F}$ est fermé (dans l'espace de Hilbert E), la projection P sur $\bar{F}$ est bien définie.
Soit $x \in E$, on peut écrire :

$$x = P(x) + \big(x - P(x)\big) \qquad (*)$$

Comme $P(x) \in \bar{F}$ et $x - P(x) \in F^{\perp}$ (car $\langle x - P(x),\ y\rangle = 0\,, \forall y \in \bar{F}$ et $F^{\perp} = \bar{F}^{\perp}$)
alors $E = \bar{F} + F^{\perp}$.
Montrons que la décomposition $(*)$ est unique c.-à-d. $\bar{F} \cap F^{\perp} = \{0\}$.
Soit $z \in \bar{F} \cap F^{\perp}$ alors $z \in \bar{F}$ et $z \in F^{\perp}$

$$(z \in F^{\perp} = \bar{F}^{\perp}) \Longrightarrow \langle z,\ y\rangle = 0, \forall y \in \bar{F}\,.$$

En particulier pour $z \in \bar{F}$; $\langle z,\ z\rangle = 0$ d'où $\|z\|^2 = 0$ et donc $z = 0$.
Ainsi $\bar{F} \cap F^{\perp} = \{0\}$ et $E = \bar{F} \oplus F^{\perp}$.

Exercice 2: *L'espace*

$$H = L^2([-1,1],\mathbb{R}) = \left\{ f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx < +\infty \right\}$$

est de Hilbert pour le produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.
On pose $v(x) = |x|$ et $e(x) = 0$ pour $x \in [-1,1]$.

1. *$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f) = \int_{-1}^{1} |x| f(x)\,dx$.*

Montrons que φ est linéaire ***(0.5pt)*** *: Soit $f, g \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on a*

$$\varphi\ (f + \alpha g) = \int_{-1}^{1} |x|\big(f(x) + \alpha g(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{1} |x| f(x) dx + \alpha \int_{-1}^{1} |x| g(x)\,dx$$

i.e. $\varphi\ (f + \alpha g) = \varphi\ (f) + \alpha\, \varphi\ (g)$. Donc φ est linéaire.

Corrigé

Montrons que φ est continue : ***(0.5pt)***

On a pour tout $f \in H$:

$$|\varphi(f)| = \left|\int_{-1}^{1} |x| f(x)\, dx\right| = |\langle v, f\rangle|$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|\varphi(f)| \leq \|v\| \|f\|.$$

On a

$$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = \int_{-1}^{1} v^2(x)\, dx = \int_{-1}^{1} |x|^2\, dx = \frac{1}{3}[x^3]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}.$$

D'où

$$|\varphi(f)| \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \|f\|, \quad \forall f \in H.$$

La forme linéaire φ est continue.

Calculons la norme de φ : ***(0.5pt)***

On a déjà $\|\varphi\|_{H'} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. *Existe-t-il une fonction $w \in H$ telle $|\varphi(w)| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$?*

Comme $\varphi(v) = \frac{2}{3}$, *déterminons $a \in \mathbb{R}$ tel que* $\varphi(av) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

On a :

$$\varphi(av) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a\varphi(v) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, \varphi(v)^{-1} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Il suffit alors de prendre $w = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} v$, *soit* $w(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} |x|$ *et on a* $\varphi(w) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Et par suite $\|\varphi\|_{H'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

3. *Soit le sous-espace $G = \{g \in H;\ \langle v, g\rangle = 0\}$.*

   a. *G est un sous-espace propre de H, en effet ;*

   La fonction $I : x \longmapsto x$ est un élément de G car $\langle v, I\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\, x\, dx = 0$.

   *La fonction constante **1** appartient à H mais n'appartient pas à G, puisque*

   $$\langle v, 1\rangle = \int_{-1}^{1} |x|\, dx = 1 \neq 0.$$

   Donc $\{e\} \subset G \subset H$. ***(1pt)***

   b. *Montrons que G est fermé* ***(1pt) :*** *On a*

   $$G = \{g \in H;\ \langle v, g\rangle = 0\} = \{g \in H;\ \varphi(g) = 0\} \ (car\ \langle v, g\rangle = \varphi(g))$$

   i.e $G = Ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$.

   Ainsi G est fermé car c'est l'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue φ.

   c. *G est complet car c'est un fermé de l'espace complet H.* ***(0.5pt)***

Corrigé

d. *Soit la fonction* $h: x \longmapsto x+1$ *sur G.*

Déterminons $P_G h$, *projection de h sur G.* ***(2pts)***

Remarquons que $h = I + \mathbf{1}$, *et comme* $I \in G$ *et* $\mathbf{1} \notin G$ *(voir la question a.)* *alors* $P_G h = I$.

Vérifions-le :

On a $h = I + \mathbf{1}$, *avec* $I \in G$ *et* $\mathbf{1} \notin G$ *mais comme* $h \in H = G \oplus G^{\perp}$ *alors* $\mathbf{1} \in G^{\perp}$ *d'où,* $\langle \mathbf{1}, g \rangle = 0, \ \forall g \in G$ *i.e* $\langle h - I, g \rangle = 0, \ \forall g \in G$;

et I *est bien la projection de h sur G.*

- ***(1pt)*** *Distance de h à G:* $d(h, G) = \|h - I\|$.

On a

$$\|h - I\|^2 = \|\mathbf{1}\|^2 = \int_{-1}^{1} dx = 2,$$

d'où $d(h, G) = \sqrt{2}$.

Exercice 3: *Les polynômes de Legendre* P_n $(n \in \mathbb{N})$ *sont définis par la formule de Rodrigues :* $P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$.

$(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est une base orthogonale de l'espace de Hilbert* $H = L^2([-1, 1], \mathbb{R})$.

A. *1. Calculons* $P_n(1)$: ***(1pt)***

En développant selon la formule de Leibniz, on trouve

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \frac{d^n}{dx^n}[(x+1)^n(x-1)^n]$$

$$= \frac{1}{2^n(n!)} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left((x-1)^n\right)^{(n-p)} \left((x+1)^n\right)^{(p)}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \left[n!\,(x+1)^n + n\left((x-1)^n\right)^{(n-1)}\left((x+1)^n\right)' + \cdots + n!\,(x-1)^n\right]$$

En remplaçant, on trouve

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n(n!)} \times n!\,(2^n) = 1.$$

En même temps on a, $P_n(-1) = \frac{1}{2^n(n!)} \times n!\,(-2)^n = (-1)^n$.

Montrons que $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. ***(1pt)***

On a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n(n!)} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left((x-1)^n\right)^{(n-p)} \left((x+1)^n\right)^{(p)}$$

$$= \frac{1}{2^n(n!)} \sum_{p=0}^{n} C_n^p \frac{n!}{p!}(x-1)^p \frac{n!}{(n-p)!}(x+1)^{n-p}$$

Corrigé

D'où,

$$P_n(-x)=\frac{1}{2^n(n!)}\sum_{p=0}^{n}C_n^p\,\frac{n!}{p!}(-x-1)^p\,\frac{n!}{(n-p)!}(-x+1)^{n-p}$$
$$=\frac{1}{2^n(n!)}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p(-1)^{n-p}C_n^p\,\frac{n!}{p!}(x+1)^p\,\frac{n!}{(n-p)!}(x-1)^{n-p}$$
$$=(-1)^n\frac{1}{2^n(n!)}\sum_{p=0}^{n}C_n^p\,\frac{n!}{p!}(x+1)^p\,\frac{n!}{(n-p)!}(x-1)^{n-p}$$

et le changement d'indice, $k=n-p$, donne

$$P_n(-x)=(-1)^n\frac{1}{2^n(n!)}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\,\frac{n!}{k!}(x-1)^k=(-1)^nP_n(x).$$

On a utilisé la commutativité de l'addition et du produit et le fait que $C_n^k=C_n^{n-k}$.

- *Parité de P_n:* ***(0.5pt)*** *On a $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$, donc*

si n est pair, $P_n(-x)=P_n(x),\forall x\in[-1,1]$ et P_n est pair,
et si n est impair, $P_n(-x)=-P_n(x),\forall x\in[-1,1]$ et P_n est impair.

2. *Montrons que $P_{2n}(0)=(-1)^n\,(2n)!/\left(2^n(n!)\right)^2$.* ***(2pt)***

Rappelons la formule de récurrence :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\qquad (k+1)P_{k+1}-(2k+1)XP_k+kP_{k-1}=0.$$

Pour $k=2n-1$, avec $n\geq 1$, on a

$$2nP_{2n}-(4n-1)XP_{2n-1}+(2n-1)P_{2n-2}=0,$$

Pour $x=0$, on trouve

$$2nP_{2n}(0)+(2n-1)P_{2n-2}(0)=0.$$

D'où

$$P_{2n}(0)=-\frac{2n-1}{2n}P_{2n-2}(0)$$

et de proche en proche on arrive à

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1}{(2n)(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}P_0(0).$$

Ainsi, et puisque $P_0(0)=1$, on a

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{N}{D}$$

où $N=(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 3\times 1$ et $D=(2n)(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2$.

Remarquons que $D=2^n(n!)$ et comme

$$(2n)!=(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\ldots\times 4\times 3\times 2\times 1=ND,$$

alors

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{D^2}=(-1)^n\frac{(2n)!}{\left(2^n(n!)\right)^2}.$$

A noter que, $P_{2n+1}(0)=0,\forall n\in\mathbb{N}$.

Université de Tlemcen — Département de Mathématiques

3[e] Année Licence - S5 — Décembre 2017

Introduction à l'Analyse Hilbertienne — Examen Partiel — 1H30

Corrigé

B. 1. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$. ***(0.5pt)***

En dérivant les deux membres de la relation de récurrence :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n + nP_{n-1} = 0$$

on obtient,

$$(n+1)\,P'_{n+1} - (2n+1)P_n - (2n+1)XP'_n + nP'_{n-1} = 0,$$

et sachant que

$$XP'_n = nP_n + P'_{n-1},$$

on écrit

$$(n+1)\,P'_{n+1} - (2n+1)P_n - (2n+1)(nP_n + P'_{n-1}) + nP'_{n-1} = 0,$$

$$i.e \qquad (n+1)\,P'_{n+1} - (2n+1)(n+1)P_n - (n+1)P'_{n-1} = 0.$$

Ainsi, il vient

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

2. Développons en série de polynômes de Legendre la fonction f *:* ***(2pts)***

$$f(0) = 0 \ \ et \ \ f(x) = \frac{x}{|x|} \ \ si \ \ 0 < |x| \le 1.$$

Cette fonction est impaire donc sa série ne comporte que les termes impairs :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n+1} P_{2n+1}(x)$$

avec

$$c_{2n+1} = \frac{4n+3}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,P_{2n+1}(x)dx.$$

Remarquons que la fonction $x \longmapsto f(x)P_{2n+1}(x)$ *est paire, d'où*

$$c_{2n+1} = (4n+3)\int_0^1 f(x)P_{2n+1}(x)dx = (4n+3)\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx.$$

En se servant de la question précédente, on obtient

$$\int_0^1 (4n+3)P_{2n+1}(x)dx = \int_0^1 \left(P'_{2n+2}(x) - P'_{2n}(x)\right)dx = [P_{2n+2}(x) - P_{2n}(x)]_0^1.$$

Soit

$$c_{2n+1} = P_{2n}(0) - P_{2n+2}(0) = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} - (-1)^{n+1}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n!)^2(n+1)^2}$$

c.-à.-d

$$c_{2n+1} = (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(1 + \frac{2n+1}{2(n+1)}\right) = (-1)^n\frac{(2n)!\,(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}.$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!\,(4n+3)}{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}P_{2n+1}(x)\,, \qquad 0 < |x| \le 1.$$