Université de Tlemcen
Département de Mathématiques

ANALYSE IV A.U : 17/18 **Série N°3**

Intégrales curvilignes, intégrales de surfaces

Exercice 1 :

1 /Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$I_1 = \int_c \ x - y \ ds$ où *C* est le contour du triangle ABO : A(1,0) ;B(1,1) et O(0,0).

$I_2 = \int_c \ \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$ où *C* est le segment de droite d'extrémités O et A(1,2).

$I_3 = \int_c \ xy \ ds$ où *C* est le quart de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a,b$> 0$.

$I_4 = \int_c \ x^2 dy + y^2 dx$ où *C* est l'arc $\widehat{AB}$ donné par le demi-cercle supérieur avec A(-1,0)et B(1,0).

$I_5 = \int_{OA} -x^2 dy + 2xydx$ le long du chemin OA où A(2,1) tel que :

a) Suivant la droite (OA)
b) Suivant la parabole (OA)

2/ Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule de Green:

$I_6 = \int_c \ (x^3 + 3y^2)dy + (2x - y^3)dx$ où *C* est le cercle de centre O et de rayon unité, orienté positivement .

$I_7 = \int_c \ -3xydy + 2xydx$ où *C* est le carré de sommets : (3,1) (5,1) (5,3) (3,3) orienté négativement.

$I_8 = \int_c \ \frac{-y}{(x-1)^2+y^2} dx + \frac{x(x-1)+y^2}{(x-1)^2+y^2} dy$ où *C* est un chemin polygonal fermé orienté positivement reliant les points :(0,0) (1,0) (2,2) (2,3) (0,3) (-1,2) (-1,1) .

3/

$I_9 = \int_c \ (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ où *C* est *C* est la circonférence $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = y.$

$I_{10} = \int_c \ \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ où *C* est un chemin quelconque orienté positivement reliant les points :(1,1) (0,1) dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^-$

Exercice 2 :

1/Calculer les intégrales de surfaces suivantes :

$I_1 = \iint_S \ (x^2 + y^2)ds$ où S est la face extérieure de la sphère de centre O et de rayon 1.

$I_2 = \iint_S \ x^2 dydz + y^2 \ dxdz + z^2 dxdy$ où S est la face extérieure du cube $[0, a]^3 (a > 0)$

$I_3 = \iint_S \ z \ dxdy$ où S est la face extérieure de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$

2/Appliquer la formule d'Ostrogradski-Gauss à :

$I_4 = \iint_S \ x^3 dydz + y^3 \ dxdz + z^3 dxdy$ où S est la face extérieure de la sphère de centre O et de rayon $a \ (a > 0)$.

$I_5 = \iint_S \ yzdydz + xy \, dxdy$ où S est la face extérieure du tétraèdre limité par les plans : $x = 0, y = 0, z = 0 \ et \ x + y + z = a(a > 0).$

3/Appliquer la formule de Stokes

$I_6 = \oint_C \ (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz$ où *C* est un contour fermé limitant une surface continûment différentiable S.

$I_7 = \oint_C \ (x^2 y^3)dx + dy + zdz$ où *C* est la circonférence $x^2 + y^2 = R^2, z = 0.$

Résumé du cours

Intégrales curvilignes

- Int.curv. 1ère esp. : $\int_c f(X)\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\underbrace{\|\varphi'(t)\|\,dt}_{ds}$ où $X \in \mathbb{R}^n$ et $C = \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$.

  (L'int.curv. 1ère esp. ne dépend pas du sens du parcours)

- Int.curv. 2ème esp $\int_c F(X) \underbrace{\cdot}_{\text{p.s}} d\vec{s} = \int_c F_1(X)dx_1 + \cdots + F_n(X)dx_n = \int_c F(\varphi(t)) \underbrace{\cdot}_{\text{p.s}} \varphi'(t)\ dt$

  $\int_c F_1(X)dx_1 + \cdots + F_n(X)dx_n = \int_a^b [F_1(\varphi(t))\varphi'_1(t) + \cdots F_n(\varphi(t))\varphi'_n(t)]dt$ où $C = \{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) : a \le t \le b\}$.

  (L'int.curv. 2ème esp dépend du sens du parcours)

  Formule de Green pour le plan : Si C est la frontière du domaine borné S et les fonctions $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ sont de classe C^1 dans le domaine fermé $\bar{S} = S \cup C$, on a la formule de Green :

$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}.$$

  Où le sens de parcours sur le contour C est choisi de manière que le domaine S se trouve constamment à gauche.

Intégrales de surfaces

- Int.surf. 1ère esp. $\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y))\underbrace{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}\,dxdy}_{dS}}$.

où ***D*** *est* ***la projection*** (***univoque***)***de S*** *sur le plan XOY* .

- Int.surf.2ème esp :Si $\vec{F} = (P,Q,R)$ est de classe C^1 et la normale à la surface S(d'équation : $\phi(x,y,z) = 0$) est $\vec{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (Le signe de l'int.surf. 2ème esp. dépend de la face de surface choisie)

$$\boxed{\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint_S \vec{F}.\vec{n}dS}.$$

- Si C est un contour fermé limitant une surface à deux faces S et $\vec{r} = (x,y,z)$ alors on a la **Formule de Stokes**

$$\boxed{\oint_{C^+} \vec{F}\ .\overrightarrow{dr} = \iint_{S^+} Rot\vec{F}\ .\vec{n}\ ds}.$$

Ou bien :

$$\boxed{\oint_{c^+} \boldsymbol{Pdx + Qdy + Rdz} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{\cos\alpha} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{\cos\beta} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{\cos\gamma}\right)\boldsymbol{dS}}.$$

- Si S est fermée, entourant un volume V ,alors on a la **Formule d'Ostrogradski-Gauss** :

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}.\vec{n}dS = \iiint_V div\vec{F}\ dxdydz}.$$

Ou bien :

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$