Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
L2MATH-Analyse IV AU 17/18

Série n°2

Intégrales Multiples

Exercice 1 : Indiquer les limites d'intégration dans l'intégrale double $\iint_S \ f(x,y)dxdy$ où S est le domaine borné limité par :

1. $Le\ parallélogramme$ de sommets $\mathrm{A}(1,2), \mathrm{B}(2,1), \mathrm{C}(3,4)$ et $\mathrm{D}(4,3)$.
2. $y = 1 + x^2\ et\ y = 3x^2$.
3. $Le\ secteur$ circulaire OAB de centre O et dont les extrémités de l'arc de cercle sont les points A(0, 2),B(-2,-2) ;
4. les deux cercles de rayon 1 centrés en $(0,0) et (0,1)$.
5. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\ \ et\ y \geq |x|\}$;
6. $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \geq 1\ et\ x^2 + y^2 \leq 8x\}$;
7. $y = x - 1$ et $y^2 = 3x + 4$.
8. $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 9y^2 \leq 1\ \ et\ y \geq x + \frac{1}{3}\right\}$.

Exercice 2 :

Calculer les intégrales doubles :

1. $\iint_D \ \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$ où $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\ \ , 0 < y < 1\ \ et\ 0 < x < 1\}$;
2. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{2ydx}{\sqrt{2+3x-x^3}} dy$ (changer l'ordre d'intégration).
3. $\iint_D \ (x^2 + y^2)(-x^2 + y^2)^{xy} dxdy$ en utilisant le changement de variables :
$$u = xy\ v = -x^2 + y^2$$
4. $\iint_D \ (1 - 4x^2 - +y^2)^{\frac{5}{2}} dxdy$ où D est $le\ domaine$ limité par l'ellipse : $1 = 4x^2 + y^2$

   en utilisant le changement de variables (elliptiques) $x = arcos\theta\ et\ y = brsin\theta$
   pour l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
5. $f(x,y) = (x-y)^{\alpha} e^{y+x}$
   $D\ est\ le\ parallélogramme\ de\ sommets$: A $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, C $\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ et D $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
   (Chg.vari : $u = x + y\ , v = x - y$)
6. $\iint_D \ e^{-x^2-y^2} dxdy$ où D est limité par : $x^2 + y^2 \leq R^2\ \ x > 0\ et\ y > 0$ en déduire
   $\iint_{[0,+\infty[^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Exercice 3 :

1. Calculer l'aire de la portion du cylindre $x^2 + z^2 = 4$ intérieure au cylindre $z^2 + y^2 = 4$.
2. Trouver le centre de gravité de l'aire intérieure à la cardioïde $r = 1 + sin\theta$ et extérieure au cercle $\mathrm{r} = 1$.

Exercice 4

Calculer les intégrales triples $suivantes$:

1. $\iiint_V \sqrt{z}dxdydz$ où V est le domaine limité par le cylindre parabolique

z= 4 -y^2 *et les plans* z=0 , x=2 et x=-2.

2. $\iiint_V xy\,dxdydz$ où V est le tétraèdre de sommets $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$.

3. *Après avoir passé en coordonnées sphériques*:

$$1)\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz, \quad 2)\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dz$$

4. *Après avoir passé en coordonnées cylindriques*:

$$1)\ \int_{-3}^{3} dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy \int_0^{9-x^2-y^2} dz\ ;\quad 2)\quad \int_0^{2R} dx \int_{-\sqrt{2Rx-x^2}}^{\sqrt{2Rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} dz\ ..$$

$$3)\int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz$$

5. $\iiint_B \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$ $\quad a>1\ B{:}\,boule\ unité$

Exercices corrigés

Exercice1 :

a) Calculer les intégrales doubles en changeant l'ordre d'intégration

$$I_1 = \int_0^1 \int_y^1 \frac{xydx}{\sqrt{1+x^4}}dy \qquad I_2 = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{sinydy}{y}dx$$

b) Calculer les intégrales doubles $\iint_{(D)} f(x,y)dxdy$::

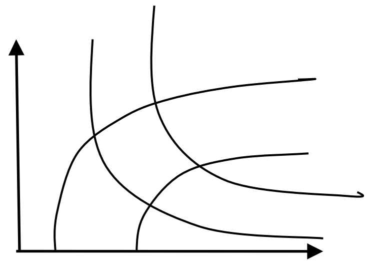
3. $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\ \ et\ 0 \ge y \ge x\}$.
4. $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2x, x^2+y^2 \ge 1,\ y \le 2-x\ et\ y \ge 0\}$.
5. $f(x,y) = |x-y|^{\alpha}$ $\quad D = [0,1]^2$
6. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 9,\ x^2+y^2 \ge 1\ \}$.
7. $f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 4\ \ et\ 1 \le x^2-y^2 \le 9\}$

Solution:

- $I_1 = \int_0^1 \int_y^1 \frac{xydx}{\sqrt{1+x^4}}dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{xydy}{\sqrt{1+x^4}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$
- $I_2 = \int_0^{\pi}(\int_x^{\pi} \frac{siny}{y}dy)dx \ = \int_0^{\pi}(\int_0^{y} \frac{siny}{y}dx)dy = \int_0^{\pi} siny = 2.$
- $I_3 = \int_{\pi}^{5\pi/4}(\int_1^2 \frac{1}{r}dr)\,d\theta \ = \frac{\pi}{4}ln2.$
- $I_4 = \int_0^{\pi/4}\int_1^{\frac{2}{sin\theta+cos\theta}} \frac{1}{r^3}drd\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_1^{2cos\theta} \frac{1}{r^3}drd\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{3}{8} - \frac{cos\theta sin\theta}{4}\ d\theta -$ $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{4cos^2\theta} - 1\,d\theta = \frac{10\pi}{192} + \frac{1-8\sqrt{3}}{16}.$

- $I_5 = \int_0^1 (\int_0^y (y-x)^\alpha dx + \int_y^1 (x-y)^\alpha dx) dy = \frac{2}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$. $(\alpha > 0)$
- $I_6 = \int_0^{2\pi} (\int_1^3 r\sqrt{1+\mathrm{r}^2} dr) d\theta = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}(5\sqrt{5}-1)$.
- $D = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 : 2 \le xy \le 4 \;\; et \;\; 1 \le x^2 - y^2 \le 9\}$

soit $\varphi : (x,y) \to (u,v) = (xy, x^2-y^2)$ $\;\; J_{\varphi^{-1}} = (J_\varphi)^{-1}$
(φ : C^1-difféomorphisme)
D étant le *quadrilatère* curviligne de la figure
et φ (D) est le *carré*: $[2,4] \times [1,9]$.



$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$ $\det(J_\varphi{}^{-1}) = 2(x^2+y^2)\Big\}$. $I_7 = \frac{1}{2}\int_1^9 dv \int_2^4 du$ = 8

Exercice 2 :

1. L'aire de la portion de la surface $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ découpée par le cylindre $x^2 + y^2 = 2x$.

$\sigma = \iint_S \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$ où S= $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2x\}$

$\sigma = 2\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2cos\theta} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}} dr) d\theta = 8\int_0^{\pi/2} 1 - sin\theta\, d\theta = 8\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) u.s$

2. Le volume du corps limité par les surfaces : $x^2 + y^2 = 2z, z = x$

$V = \iint_S x - \frac{x^2+y^2}{2}\, dxdy$ où $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2x\}$.

$V = 2\int_0^{\pi/2} (\int_0^{2cos\theta} \left(cos\theta - \frac{1}{2}\right) r^2 dr d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} cos^4\theta \; d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} cos^3\theta \; d\theta =$

$\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} 1 + 2cos2\theta + cos^2 2\theta \; d\theta$ -$\frac{8}{3}\int_0^1 1 - u^2 \; du = \pi - \frac{16}{9} \; u.v.$

Exercice 3:

1) Le volume du corps limité par la sphère: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et extérieur au cône

$x^2 + y^2 = z^2$. $V = 8\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/4} cos\varphi \int_0^a r^2 dr$= $2\pi\sqrt{2}\frac{a^3}{3}$.

2) Le moment d'inertie d'un cylindre de hauteur h et de rayon de base a, par rapport à l'axe servant de diamètre à la base du cylindre :

$\mathrm{I}_X = \iiint_V y^2 + z^2 \, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a rdr \int_0^h (r^2 sin\theta + z^2)\, dz = \frac{a^2 h\pi(a^2+h^2)}{12}$.

3) *L*e centre de gravité du cops limité par la paraboloïde $2z^2 + y^2 = 4x$ *e*t le plan x=2.

M=$\iint_D \left(\int_{\frac{2z^2+y^2}{4}}^2 dx\right) dydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 8\sqrt{2}(1-r^2)\, rdr$=$4\pi\sqrt{2}$, ,

$x_G = \frac{8\sqrt{2}}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^4)\, rdr = \frac{4}{3}$.

$y_G = z_G = 0$ $\;(par\ symétrie)$ D= $\left\{(y,z) : \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} \le 1\right\}$ $\;\; y = 2\sqrt{2}\, rcos\theta \; et \; z =$ $2rsin\theta \;\; et \; J = 4\sqrt{2}$r

Applications des intégrales doubles et triples

- L'aire A d'une surface plane limitée par un domaine compact D de $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{A = \iint_D dxdy}$$

- L'aire σ d'une surface $z = z(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$ dont la projection univoque dans $\mathbb{R}^2$ est limitée par un domaine compact D :

$$\boxed{\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

- Applications mécaniques :
  - La masse d'une plaque mince , plane ,limitée par un domaine compact D du plan et telle que sa densité superficielle en tout point est donnée par $\gamma(x, y)$:

$$\boxed{M = \iint_D \gamma(x, y)dxdy}$$

  - Les coordonnées du centre de gravité G(x_G, y_G)sont données par :

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\gamma(x, y)dxdy\,,\ \ y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\gamma(x, y)dxdy$$

  - La masse d'un corps K de $\mathbb{R}^3$ limité par un domaine compact U et telle que sa densité en tout point est donnée par $\gamma(x, y, z)$:

$$\boxed{M = \iiint_U \gamma(x, y, z)dxdydz}$$

  - Les coordonnées du centre de gravité G(x_G, y_G, z_G) $de\ K$ sont données par :

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_U \gamma(x, y, z)dxdydz\,, y_G = \frac{1}{M}\iiint_U \gamma(x, y, z)dxdydz$$

$$z_G = \iiint_U \gamma(x, y, z)dxdydz.$$

  - Le volume d'un corps de K de $\mathbb{R}^3$ limité par un domaine compact V :

$$\boxed{V = \iiint_U dxdydz}$$