Université de Tlemcen
Département de Mathématiques
L 2.MATH

Série N°1

I. Fonctions réelles de plusieurs variables

Exercice 1 : a/ Déterminer et représenter les domaines d'existence des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{8-4y^2-2x-x^2}$ 2/ $f(x,y) = \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

$f(x,y) = Ln(x^2+y^2-1)(3-2y-x^2-y^2)$, 3/ $f(x,y) = \text{argth}(xy)$

4/$f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{z}+\sqrt{2x-z^2-y^2}$, 5/ $f(x,y,z) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} + \arcsin|y| + \arcsin\sqrt{z-1}$,

(supp)6/ $f(x,y,z) = Ln(1-x-y-z)$, 7/ $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{z^2+1}}$ 8/ $f(x,y,z) = \sqrt{2-|x|-|y|-|z|}$.

b/ Représenter les courbes de niveau des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y) = x^2y$ 2/ $f(x,y) = y^3$ 3/ $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 4/ $f(x,y) = \frac{y}{x}$.

c/ Déterminer les surfaces de niveau des fonctions suivantes :

1/ $f(x,y,z) = x+y+z$ 2/ $f(x,y) = x^2+y^2+z^2$ 3/ $f(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2$.

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes si elles existent :

1/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$ 2/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}$ 3/ $\lim\limits_{x,y\to\infty} \frac{x-y}{x^2+y^2}$ 4/ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{x-y}$

5/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^3-xy}{x^4+y^2}$ 6 /$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+xy)}{x}$ 7/ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} .\frac{\sin x^2+\sin 2xy+\sin y^2+\sin z^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

8/ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin xy.\cos y}{(1-e^{xy})(\pi-2y)}$ 9/ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\text{Arctan}^2(\sin(x^2+y^2+z^2))}{\ln(1+\tan(x^2+y^2+z^2))}$ 10/ $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+z^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+z^2+y^2}}$

(Supp) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin xy}{sh^2x+sh^2y}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{\cos y-\cosh y}$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{shx^2+shy^2+shz^2}$

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+2y^2+3z^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-chxy}{y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^4}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^2-y^2}$

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz+z^3}{2x^3+yz^2}$

Exercice 3 : Soit f : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) = 0$, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

(supp) Soit f : $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \ \sin\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$.

Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ et $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ n'existent pas, mais $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice 4 : Comment faut-il choisir la fonction g : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de sorte que la fonction f : $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$

définie par $f(x,y) = \begin{cases} \left(1+\frac{e^y-1}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{y}} & \text{si } y \neq 0 \\ g(x) & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

soit continue aux points (x,0) ?

Exercice 5 : 1/Peut-on prolonger par continuité sur R^2, la fonction définie sur $R^2 - \{(x,x) : x \in R\}$

par : $f(x,y) = \frac{chx - chy}{x-y}$?

2/ (Supp) Même question pour les fonctions définies sur $R^2 - \{(0,0)\}$ par:

i) $f(x,y) = \frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$ ii) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ iii) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

iv) $f(x,y,z) = \frac{2x^2+y^2+5z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (au pt(0,0,0)).

Exercice 6 : Etudier la continuité des fonctions f : $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ définies par

1/ $f(x,y) = \begin{cases} xe^{\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. (Supp)2/ $f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{|x|^{\alpha_1}|y|^{\alpha_2}}{(|x|^{\beta_1}+|y|^{\beta_2})^{\gamma}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{matrix}\right\}$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\ \beta_2$ et γ sont des constantes strictement positives.

Exercice 7 : (Supp) Soient $u = \ln(x^2+y^2+xy)$, $v = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, $w = x + \frac{x-y}{y-z}$

Vérifier que : $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2$, $x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y} = x.y + v$, $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 1$.

Exercice 8: *Soit* f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \left\{\begin{matrix} y & \text{si } |x| < |y| \\ x & \text{si } |x| > |y| \\ 0 & \text{si } |x| = |y| \end{matrix}\right\}$

Etudier la continuité ,l'existence des dérivées partielles et leurs continuité.

Exercice 9 : 1/ *Soit* f:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{matrix}\right\}$.

Montrer que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ mais la fonction f n'est pas continue en (0,0).

2/(Supp) Même question avec i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

3/ Calculer $\nabla f(0,0,0)$ telle que :

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{\mathrm{th}\left(\sqrt{x^4+y^4-z^2}\right)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

Exercice 10 : i) Calculer $\nabla f(1,0)$ pour $f(x,y) = \int_x^{x^2+y^2} \mathrm{th}(x^2+y^2-2t)\,dt$.

ii) Calculer $\nabla f(0,0)$ pour $f(x,y) = \int_{xy}^{y^2+x} \mathrm{sh}(xy+t^2) + \cos(xt-y^2)\,dt$

iii) Calculer : $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\int_{-t}^{t} e^{t^2x^3}dx}{\sin t}$ (supp) $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\int_{t^2}^{t} \left(x^2+\mathrm{ch}(x^2t^3)\right)^{1/2}dx}{\sin t^3}$.

Exercice 11

1) *Soit* $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y,z) = \left\{\begin{matrix} \frac{x^5-5y^4}{x^2+4y^2+3z^2} + e^y & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 1 & \text{si } x=y=z=0 \end{matrix}\right\}.$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^3$.

b) Etudier la continuité des dérivés partielles de f sur $\mathbb{R}^3$.

(supp) 2) *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } x=y=0 \end{matrix}\right\}.$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Etudier la continuité des dérivés partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

3) *Soit* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \left\{\begin{matrix} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x=y=0 \end{matrix}\right\}.$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, *que peut*-on conclure ?

Exercice 12 :

1) Soit $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 $f(x,y) = F(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, r, \theta$.

On pose $F(r,\theta) = r.\theta$, Calculer de deux façons différentes $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

2) Résoudre l' équation aux dérivées partielles suivantes : $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (aprés passage en coordonnées polaires).

3) Trouver toutes les applications $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1sur $\mathbb{R}^2$telle que : $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2y$,en utilisant le changement de variables $\begin{cases} X = x \\ Y = x+2y \end{cases}$

Exercice13

3) Soit $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 exprimer en fonction des dérivées partielles de f et g la dérivée de chacune des fonctions F définies par :

1. $F(x) = f(x+1, \mathrm{th}x^2, \cos x^3)$ 2. $F(x,y) = g(xy^2, x-y)$
3. $F(x) = f(x, g(2-x^2, 3x), \sin x)$ 4. $F(x,y) = g(xy, 2x)$.

3) Soit la fonction $f:\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2\sin^2 t + y^2\cos^2 t)\,dt$

Montrer que : $y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \pi$, en déduire $\nabla f(x,y)$.

4)(supp) Vérifier que la fonction $f:R \to R \quad f(x) = \int_0^x g(t)\sin\alpha(x-t)dt \quad \alpha > 0$

où $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, est solution de l'équation différentielle $y''(x) + \alpha^2 y(x) = \alpha g(x)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. Application : calcul de $\int_0^1 x^5\sin(1-x)dx$

Exercice14:

a)Former les équations du plan tangent et de la normale aux surfaces suivantes et aux points indiqués :

1.à la sphère $x^2+y^2+z^2 = 2Rz$ au point $(R\cos\alpha, R\sin\alpha, R)$.

2.à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ au point (2,1,3)

(Supp) 2. au cône $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{8}$ au point (-4,-3,4)

(Supp)3. au paraboloïde $z = x^2+y^2$ au point $(1,-2,5)$.

b) Déterminer le plan tangent à la surface paramétrée par les équations :

$x = u^2$, $y = v^2, z = u + 2v$. au point (1,1,3).

Exercice 15 a) Calculer la dérivée de f au point donné dans la direction indiquée par l'angle θ :

1. $f\,(x,y) = x^2y^3 - y^4$ $(2,1)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$
2. $f\,(x,y) = ye^{-x}$ $(2,0)$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) Calculer le taux de variation maximum de f au point donné et indiquer dans quelle direction il se produit :

1. $f\,(x,y) = sinxy$ $(1,0)$
2. $f\,(x,y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $(3,6,-2)$

Exercice 16 : (Extrait du contrôle continu15)

Soit la surface (montagne) d'équation: $z = f\,(x,y) = 600 - x^2 - 4y - y^2$.

1) Montrer que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer le gradient de f , en déduire la pente à la surface de la montagne au point P$(10,10,360)$ dans la directions Nord-ouest ; dire si l'on commence par monter ou descendre lorsque l'on se déplace depuis ce point dans cette direction.Dans quelle direction la pente est-elle maximale ? Calculer sa valeur.

3) Ecrire l'équation du plan tangent à la surface de la montagne en ce point.

Exercice 17(supp) (Extrait du cont16)

Soit f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = -y^2cosx + 2x^2 + \frac{3}{2}y^2 - 3\int_{-x}^{y} Sh(xyt^2)\ dt$

1) Montrer que f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\nabla f(0,1)$ et $D_{\vec{v}}f(0,1)$ où $\vec{v}$ est un vecteur unitaire. Donner la valeur maximale du taux de croissance de f au point $(0,1)$, indiquer la direction suivant laquelle il est obtenu .

3) Calculer approximativement la valeur de $f(x,y)$ au point $(0.007\ ,\ 0.997)$.

4) On considère la surface d'équation (S) $z = f(x,y)$, écrire l'équation du plan tangent (P) à la surface (S) au point (0 , 1, $\frac{1}{2}$).

Exercice 18 :

1) Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions suivantes sont différentiables aux points indiqués :

i) $\mathrm{f}\,(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ au pt$(-1,0)$ ii) $\mathrm{f}\,(x,y,z) = x^2 - y^2 + z$ au pt$(0,1,0)$

supp: iii) $\mathrm{f}\,(x,y) = |y|\ln(1+x)$ au pt$(0,0)$ iv) $\mathrm{f}\,(X) = \ln\left(1 + \|X\|_2{}^2\right)$ au pt$(0,\dots,0)$

2) Soit $\mathrm{f}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\mathrm{f}\,(x,y,z) = \frac{xz-2y}{x^2+3y^2+z^2+1}$.

Montrer que f est différentiable en tout point. Calculer df(0,2,0) et écrire le développement limité de f à l'ordre un au voisinage de (0 ,2,0).

3) (supp) Même question avec $\mathrm{f}\,(x,y) = (x^2+y^2+1)^{1/2}$, donner son approximation affine au pt$(-1,1)$.

4) Soit $\mathrm{f}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 1) $\mathrm{f}\,(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$. (supp)2) $\mathrm{f}\,(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$

f est-elle différentiable à l'origine ?

Exercice 19:

Soit $\mathrm{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathrm{f}\,(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \end{cases}$.

Montrer que :

1) Si $g(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

2) Si $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ alors f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$mais différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

3) Si $g(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ alors f n'est pas différentiable mais continue et les D.P existent dans $\mathbb{R}^2$.
4) Si $g(x,y)=|x|+|y|$ alors on a ni différentiabilité ni existence des D.P mais continuité dans $\mathbb{R}^2$.
5) Si $g(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$ alors on a ni différentiabilité ni existence des D.P ni continuité dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 :

1/ Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$f(x,y,z)=\arctan\frac{yx}{z^2}$, $g(x,y)=x^y$, $h(x,y)=\sin x.\cos y$.

Evaluer: $df(\pi/_4,1,-1)(0.1;0{,}02;\ -0{,}01), dg(1,2)(-0.1;0{,}03)$, $dh(1,3)(0.04\,;-0{,}02;)$.

2/(supp)Calculer approximativement :$\sqrt{(2{,}001)^3.(0{,}095)}$, $cos44°.\sin31°$.

Exercice 21:

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\begin{cases}x^3y\sin\frac{y}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

1/Etudier la différentiabilité de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2/Déterminer $f''_{xy}(0,y)$ et $f''_{yx}(0,y)$ lorsque $y\neq 0$ et conclure.

Exercice22: Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } x=y=0\end{cases}$

1/Calculer$f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

2/En particulier déterminer $f'_x(0,y)$ lorsque $y\neq 0$ et $f'_y(x,0)$ lorsque $x\neq 0$.

3/Calculer $f'_x(0,0)$ et $f'_y(0,0)$.

4/ Calculer$f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$. Les hypothèses de Schwartz sont t- elles satisfaites ?

Exercice 23 : (Supp) Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ admet un prolongement continu à $\mathbb{R}^2$, noté $\tilde{f}$.

1/Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de $\tilde{f}$.

2/ Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles secondes de $\tilde{f}$.

Exercice 24:

1/ Calculer $d^2z(0,1)$ et $d^2u(0,0,0)$ si : $z=e^{xy}$, $u=x^2+2y^2+3z^2-2xy+4xz+2yz$.

2/ (Supp)Calculer $d^2z(1,2)$ si $z=x^2+y^2+xy-4\ln x-10\ln y$.

3/ Ecrire le Développement limité (formule de Taylor) à l'ordre 3 au voisinage du point (1,-1)de la fonction e^{x+y} .

4/ (Supp)Ecrire le Développement limité de Maclaurin à l'ordre 3 de $f(x,y)=e^x\sin y$.

5/ Soit $f:\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}\to\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=\mathrm{Arctan}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ et calculer sa matrice Hesseinne.

6/Trouver l'accroissement de la fonction $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$lorsqu'on passe des valeurs x=1,y=2 aux valeurs $x_1=1+h, y_1=2+k$.

Exercice 25:

Vérifier que les expressions suivantes sont des différentielles totales puis déterminer les fonctions originales correspondantes:

1/ $(\cos x+3x^2y)dx+(x^2-y^2)dy$ 2/ $(2xyz-3y^2z+8xy^2+2)dx+(8x^2y-6xyz+x^2z+1)dy+(x^2y-3xy^2+3)dz$

(Supp) : 3/ $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)dy+\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{z^2}\right)dz$. 4/ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

4/Déterminer a,b de manière que l'expression $\frac{(ax^2+2xy+y^2)dx-(x^2+2xy+by^2)dy}{(x^2+y^2)^2}$ soit la différentielle totale d'une fonction z et la déterminer.

(Supp) 5/ A quelle condition doit satisfaire la fonction $f(x,y)$ pour que l'expression $\big(f(x,y)\big)(dx+dy)$ soit une différentielle totale ?

Exercice26:

On considère l'équation aux dérivées partielles : $(1) a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$,où a,b et c sont des constantes réelles avec $ac\neq 0$,

1.transformer l'équation en effectuant le changement de variables :
$u = x + \alpha y$ et $v = x + \beta y$.
2.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet deux solutions réelles distinctes alors on peut choisir α et β telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$,en déduire toutes les fonctions f qui vérifient (1).
3.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double réelle alors on peut choisir α et β telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$,en déduire toutes les fonctions f qui vérifient (1).
4.Montrer que si l'équation E :$ar^2 + br + c = 0$ admet des solutions complexes alors on peut choisir α et β telle que (1) a la forme $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0$.

Exercice27: Déterminer l'ensemble les fonctions réelles :

a/de classe C^2 telles que : $f''_{xy}(x,y) = 0$ et $f''_{xx}(x,y) = 0$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b/ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ telles que :$-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} = kf(x,y)$ $k \in \mathbb{R}$

Exercice 28: (Supp) On considère les équations aux dérivées partielles suivantes :

$\frac{\partial f}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = k^2 \Delta f$ (Chaleur), $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (Ondes) et $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ =0 (Laplace).

1/ Vérifier que $f(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{\frac{-x^2 - y^2}{4a^2 t}}$ est solution de l'une des équations.

2/ Vérifier que $u(x,y) = \sin(a\beta y + \varphi)\sin(\beta x)$ satisfait à l'équation des ondes.

3/ Soit $u(x,y)=\ln((x-a)^2 + (y-a)^2)$, calculer Δu et étudier son domaine de définition.

Exercice 29:
a. Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ à l'aide du changement de variables u=x+ay, v=x-ay .
b.Transformer les équations :
1. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ en posant $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$,en prenant pour nouvelles variables $u = x + y$ et $v = \frac{y}{x}$ et pour nouvelle fonction $w = \frac{z}{x}$
(Supp)3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ en prenant pour nouvelles variables $u = x + y$ et $v = x - y$ et pour nouvelle fonction $w = xy - z$

Exercice 30: Laplacien en coordonnées polaires
1/Soient f et g de classe C^2 dans R^2 telles que : $f(x,y) = g(r,\theta)$: expression de f en coordonnées polaires
a/Vérifier que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$
b/Trouver deux fonctions de classe C^1 $\sigma : R_+^* \to R$ et $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to R$ telles que la fonction $f : R_+^* \times R \to R$ définie par $f(x,y) = \sigma\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) + \varphi\left(\mathrm{Artan}\frac{y}{x}\right)$ soit harmonique($\Delta f = 0$)

Exercice 31: Laplacien en coordonnées cylindriques ou sphériques

1/Soient f et g de classe C^2 dans R^3 telles que : $f(x,y,z) = g(r,\theta,z)$
a/Vérifier que $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$
b/ Vérifier que $\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{\mathrm{cotan}\varphi}{r^2}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$

Exercice 32 Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et: $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ classe C^2 telle que

$f(x,y) = h(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de $h'(r)$ et $h''(r)$ puis trouver les fonctions *h telle que :* $\Delta \boldsymbol{f} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\boldsymbol{ln(x^2+y^2)}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+y^2}}}$**.** Déterminer les solutions f qu'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 33: Trouver les extrema des fonctions suivantes :

1.$f(x,y) = \frac{xy^2}{2} + x^3 - 4x + y^2$ 2. $f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$.

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x + y - 1$. 4 . $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

5. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + \frac{4}{3}z^3 - x^2 + y^2 - 2xz^2$ 6. $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + xyz + 9z^2$.

(Supp)1) $f(x,y) = (-x^2 + y^2)e^{(-x^2-y^2)}$ 2) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$ 3) $f(x,y) = xy(7 - x^2 - y)$

4) $f(x,y) = \cos x . \sin y + \sin^2 x$, $x \in]0,\pi[\times]-\pi,\pi[$ 5) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 2x + y - 1$.

6) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz + z - \frac{y}{8}$ 7). $f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$

Exercice 34:

a) Maximiser la fonction $f(x,y,z) = (xz + yz) + 5xy$ avec la contrainte xyz =10 avec $x > 0$, $y > 0$ *et* $z > 0$.
b) Minimiser la fonction $f(x,y) = -x^2 - 2y^2 + 6x + 8 - 2xy$ avec la contrainte x+y = 5
c) Déterminer un parallélépipède de surface S donnée de volume maximum.
d) Déterminer les extrema globaux de la fonction $z = (x+y)^2$ dans le carré: D=$[0,1]^2$.
e) Déterminer les extrema globaux de la fonction $z = x^2 - 6y^2 - 4xy - 4y + 6x - 6$ dans le domaine compact limité par le triangle de sommets A(0,3)B(-4,1)C ($-3,-2$)

(Supp).Trouver les extrémums des fonctions sous les conditions indiquées :
1.$f(x,y) = 3 - y^2$: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x > 0$, $y > 0$
2. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$: $x + y + z = 1$.
3. $f(x,y) = 5x^2 + 6y^2 - xy$: $x + 2y = 24$.

Exercice 35 : Soit F: $R^2 \to R$ telle que: $F(x,y) = x^3 - y^2 + 2x^2y$, déterminer :
i) L'ensemble des points au voisinage desquels le T.F.I permet d'expliciter y en fonction de x.
ii) L'ensemble des points au voisinage desquels le T.F.I permet d'expliciter x en fonction de y.
(Supp) Même questions pour les fonctions :
1. $F(x,y) = x^3 + x^2 - y^2$, 2. $F(x,y) = x^2 - y + 3x^2y$.

Exercice 36 :
1. A partir de la relation : $y^3 - 2x = x^3 + y + 3$, on explicite y =$\varphi(x)$ au voisinage du point (-1,1) . Calculer $\varphi(-1)$, $\varphi'(-1)$et $\varphi''(-1)$.

2. Montrer que l'équation $x.cosy + y\sqrt{1+x} = 0$ définie une fonction y =$\varphi(x)$ au voisinage de$(0,0)$,écrire son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de$(0,0)$.Même question pour $y^2 - 5x^2 + 7xy^3 = 1$ au voisinage de$(0,1)$
3. Montrer que l'équation $chx.\text{shy} + e^y \sin x = 0$ définie une fonction y =$\varphi(x)$ au voisinage de$(0,0)$,écrire L'équation de la tangente à la courbe en ce point.
Même question pour l'équation $(y)^{x+1} + \cos\pi(x+y) = 0$ au point $(0,1)$.
4.Calculer z'_x et z'_y à partir des relations : $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, yz+ xlny =z^2
(Supp) Soit $f(x,y,z) = x^3z + e^{-x} - y^2$. Vérifier que $f(0,1,-1) = 0$ et montrer qu'il existe une fonction de classe C^1 au voisinage du point $(1,-1)$ telle que $g(1,-1) = 0$ et $f(g(y,z),y,z) = 0$.
Calculer le gradient de g au point $(1,-1)$.

II. Fonctions véctorielles de plusieurs variables

Exercice 1 : Calculer les matrices jacobiennes des applications suivantes :

1. $f(r,\theta,\varphi) = (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ 2. $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$
2. (Supp) $f(x,y,z) = y^3 - 2x^2 + y \quad \sin z$ 3. (Supp)$f(x,y,u,v) = (u + 6v - x + y, xu + 3yv)$.
4. $f(x,y,z) = (xyz, x + 2y - z)$ 5. $f(t) = (e^t\cos t, e^{-t}\sin t, te^t)$ 6. $f(x,y,z) = (2x - yz, y^2, x + 3z)$
7. $f(X) = AX + B \quad X \in R^n$(A matrice $(m,n)B \in R^m$. 8. $f(X) = (X, \|X\|^2)$

Exercice 2 :

1/Soit $f: R^3 \to R^2$ telle que $f(0,0,0) = (-1,1)$ et $J_f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Soit $g(x,y) = (2x - 3 - y, -x^2y + 2)$, calculer $d(gof)(0,0,0)$.

2/ Soit $f: R^2 \to R^3$ telle que $f(0,0) = (0,1,1)$ et $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Soit $g(x,y,z) = \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+y^2}} + z, x.\left(\arctan\sqrt{1+y^2}\right), z\right)$, calculer $d(gof)(0,0)$.

3/ Soient $f: R^3 \to R^2$ de classe C^1 et $g : R^2 \to R^2$ telles que :

$g(u,v) = f(\ln(u^2 + 1) + v, \sin u - uv, e^{uv})$ et $J_f(1,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Montrer que g est de classe C^1 et déterminer $dg(0,1)$.

4/(supp) Calculer $d(gof)(0,0)$ pour les fonctions telles que :

a) $g(x,y,z) = \left(\frac{x}{2} + yz^2 - 1, x + y\right)$ et $f(x,y) = \left(y.\arcsin x, -x.\arctan y + 1, \operatorname{argsh}(x - y)\right)$

b) $g(x,y,z) = ((x - y + z)^2, x + 4xy - z)$ et $f(x,y) = \left(-ye^{-x+y^2}, \sin y - 5x^2, (x - y^2)^3\right)$

Exercice3

Soit $F: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ *telle que* $F = (f_1, f_2, f_3)$ avec

$$\begin{cases} f_1(u,v,x,y,z) = v(1 + y + x^2y^3) + z \\ f_2(u,v,x,y,z) = e^v(x + \sin uy) - y + 1 \\ f_3(u,v,x,y,z) = u + y - \cos x + 2z \end{cases}$$

On considère le système (S) d'équations : $F(x,y,z,u,v) = (0,0,0)$

1. Montrer que l'on peut résoudre le système(S) par rapport à x, y, z en fonction de u *et* v $(\phi(u,v) = (x,y,z))$dans un voisinage du point $(0,0,0,1,0)$.La solution est-elle unique ?
2. Montrer que ϕ est de classe C^1 et calculer sa matrice jacobienne au point$(0,0)$.

Exercice 4:

Soient f, g *et* h trois fonctions de classe $C^1 sur\ \mathbb{R}$, on considère le système (S_t) d'équations :

$$(S_t)\begin{cases} f(xy) + g(yz) - (z + t) = 0 \\ f(yz) + g(xy) - f(z + t) = 0 \\ h(xt) + h(yt) - z.h(1 - z) = 0 \end{cases}$$

1. Sous quelles conditions suffisantes peut-on résoudre x, y, z en fonction de t dans un voisinage du point $(x_0, y_0, z_0, t_0) = (1,1,1,0)$.
2. Supposant les conditions précédentes vérifiées, on donne : $f'(1) = 0$; $g'(1) = -1$ *et* $h'(0) = -1$, calculer $x'(0), y'(0)$ *et* $z'(0)$.
3. (Cette partie est indépendante de 1 et 2) On considère le système (S_0) (t = 0) , on pose :

$$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \\ \varphi_3(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ telle\ que\ \phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

a) Donner des conditions suffisantes pour que ϕ soit un difféomorphisme local au voisinage du point $(0,1,1)$.

b) On donne $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Montrer que le système $\phi(X) = Y$ admet une solution unique si Y appartient au voisinage de $(0,0,0)$.

Exercice 5

1/ Démontrer que l'on peut résoudre le système d'équations :

$\begin{cases} u^2 + v^2 = \ln x \\ u^3 + 2v^3 = \ln y \end{cases}$ dans un voisinage ouvert de $(1,1)$ dans la forme $u = f(x,y)$ et $v = g(x,y)$ calculer $d\phi(e^2, e^3)$ où $\phi = (f,g)$.

2/(supp)Montrer que le TFI est applicable et calculer les partielles *premières* aux points donnés

1. $F(x,y;u,v) = (2x - 3y + u - v, x + 2y + u + 2v)$ au point$(0,0,0,0)$

2. $F(x,y;u,v) = (x-2y+u+v-8, x^2-2y^2-u^2+v^2-4)$ au point$(3,-1,2,1)$.

Exercice 6:

1. Soit f *une* fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et telle que $\forall x \in \mathbb{R}\ f'(x) \neq 0$.

Montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1}est différentiable en tout point de $f(\mathbb{R})$.

2. Soit f définie par $f(x) = x + x^2 sin\frac{\pi}{x}$ si x 6= 0 et f (0) = 0.

Montrer que $f'(0)$ existe et $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Expliquer

Exercice7:

1. Montrer que l'application $\varphi: (r,\theta) \to (x,y) = (rcos\theta, rsin\theta)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert$]0,+\infty[$ × donner les formules de passage entre les dérivées partielles de f et celles de φ .

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par g(x,y) = (x+y, xy). Trouver un ouvert connexe maximal U de $\mathbb{R}^2$ tel que g soit un difféomorphisme de U sur g(U).

3. Soit h l'application de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $h(x,y) = (e^x cosy, e^x siny)$.
Montrer que h est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$; que $h'(x,y)$ est un élément de Isom($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$) pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$; mais que h n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur h($\mathbb{R}^2$).

Exercice8(supp)

1/Vérifier que l'application $(x,y) \longmapsto (u = x + x^2 + y, v = x^2 + y^2)$ définit une application bigective dans un voisinage ouvert de $(x,y) = (1;-1)$.

2/Montrer que le théorème d'inversion locale est applicable et trouver l'inverse pour les fonctions $\varphi\,(x,y) = (x, x^2+y)$et $\varphi\,(x,y) = (2x-y, x+3y)$.

Exercice 9:

Soit $\varphi: R^2 \to R^2$ telle que $\varphi\,(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$.Vérifier que $\varphi'(x,y)$ est inversible sur $R^2 - \{(0,0)\}$ mais l'application φ n'est pas injective dans $R^2 - \{(0,0)\}$.

Si $D = \{(x,y): x > 0\ et\ y > 0\}$ et $D' = \{(x,y): y > 0\}$,vérifier que $\varphi: D \to D'$ est un homéomorphisme déterminer φ^{-1}explicitement.

Exercice 10:

1/ On considère l'application « pli » définie par : $f: R^2 \to R^2$ telle que $\begin{cases} X = x \\ Y = y^2 \end{cases}$

En quels points est-ce un difféomorphisme local ? global ? quel est l'image inverse .

2/Même question pour les applications $f, g: R^3 \to R^3$ définies par : $f(x,y,z) = (x+z, yz-3x, z^2)$ et $g(x,y,z) = (e^{2x}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y)$.

3/(supp) Soit $f: R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R^2$ telle que $\begin{cases} X = \frac{x}{y} \\ Y = x^2+y^2 \end{cases}$

Montrer que f est un C^∞ difféomorphisme local dans $R^2 \setminus \{(0,0)\}$, est-il global ?

Exercice 11

Soit l'application f de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(sin\frac{y}{2} - x, sin\frac{x}{2} - y\right)$.

1. Justifier que f est de classe C^1, calculer sa différentielle , vérifier que $df(x,y)$ est inversible pour tout (x,y) dans $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$ et justifier que $f(\mathbb{R}^2)$) est un ouvert.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on prendra comme norme sur $\mathbb{R}^2$: $\|(x,y)\| = |x| + |y|$.
4. En déduire que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 sur\ \mathbb{R}^2$.
5. Calculer. $df^{-1}\left(1-\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\right)$