Résumé du cours

Intégrales curvilignes

- Int.curv. 1ère esp. : $\int_c f(X)\, ds = \int_a^b f(\varphi(t))\, \underbrace{\|\varphi'(t)\|\, dt}_{ds}$ où $\in \mathbb{R}^n$ et $C = \varphi([a,b]) \subset \mathbb{R}^n$.

(L'int.curv. 1ère esp. ne dépend pas du sens du parcours)

- Int.curv. 2ème esp $\int_c F(X) \underbrace{\cdot}_{\text{p.s}} d\vec{s} = \int_c F_1(X)dx_1 + \cdots + F_n(X)dx_n = \int_c F(\varphi(t)) \underbrace{\cdot}_{\text{p.s}} \varphi'(t)\ dt$

$\int_c F_1(X)dx_1 + \cdots + F_n(X)dx_n = \int_a^b [F_1(\varphi(t))\varphi'_1(t) + \cdots F_n(\varphi(t))\varphi'_n(t)]dt$ où $C = \{\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) : a \le t \le b\}$.

(L'int.curv. 2ème esp dépend du sens du parcours)

<u>Formule de Green pour le plan</u> : Si C est la frontière du domaine borné S et les fonctions $P = P(x,y), Q = Q(x,y)$ sont de classe C^1 dans le domaine fermé $\bar{S} = S \cup C$, on a la formule de Green :

$$\boxed{\oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}.$$

Où le sens de parcours sur le contour C est choisi de manière que le domaine S se trouve constamment à gauche.

Intégrales de surfaces

- Int.surf. 1ère esp. $\boxed{\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y)) \underbrace{\sqrt{1+\varphi_x'^2+\varphi_y'^2}dxdy}_{dS}}$.

où $\boldsymbol{D}$ *est* **la projection** (**univoque**) **de** $\boldsymbol{S}$ *sur le plan XOY* .

- Int.surf.2ème esp :Si $\vec{F} = (P,Q,R)$ est de classe C^1 et la normale à la surface S(d'équation : $\phi(x,y,z) = 0$) est $\vec{n} = \frac{\overline{\nabla\phi}}{\|\nabla\phi\|} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ (Le signe de l'int.surf. 2ème esp. dépend de la face de surface choisie)

$$\boxed{\iint_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS = \iint_S \vec{F}.\,\vec{n}dS}.$$

- Si C est un contour fermé limitant une surface à deux faces S et $\vec{r} = (x,y,z)$ alors on a la **Formule de Stokes**

$$\boxed{\oint_{c^+} \vec{F}\ .\overrightarrow{dr} = \iint_{S^+} Rot\vec{F}\ .\vec{n}\ ds}.$$

Ou bien :

$$\boxed{\oint_{c^+} \boldsymbol{Pdx + Qdy + Rdz} = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{cos\alpha} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{cos\beta} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{cos\gamma}\right)\boldsymbol{dS}}.$$

- Si S est fermée, entourant un volume V ,alors on a la **Formule d'Ostrogradski-Gauss** :

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}.\,\vec{n}dS = \iiint_V div\vec{F}\ dxdydz}.$$

Ou bien :

$$\iint_S (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Applications des intégrales doubles et triples

- L'aire A d'une surface plane limitée par un domaine compact D de $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{A = \iint_D dxdy}$$

- L'aire σ d'une surface $z = z(x,y)$ de $\mathbb{R}^3$ dont la projection univoque dans $\mathbb{R}^2$ est limitée par un domaine compact D :

$$\boxed{\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}$$

- Applications mécaniques :

  - La masse d'une plaque mince , plane ,limitée par un domaine compact D du plan et telle que sa densité superficielle en tout point est donnée par $\gamma(x,y)$:

$$\boxed{M = \iint_D \gamma(x,y)dxdy}$$

  - Les coordonnées du centre de gravité G(x_G, y_G) sont données par :

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\gamma(x,y)dxdy\,, \quad y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\gamma(x,y)dxdy$$

  - La masse d'un corps K de $\mathbb{R}^3$ limité par un domaine compact U et telle que sa densité en tout point est donnée par $\gamma(x,y,z)$:

$$\boxed{M = \iiint_U \gamma(x,y,z)dxdydz}$$

  - Les coordonnées du centre de gravité G(x_G, y_G, z_G) $de\ K$ sont données par :

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_U \gamma(x,y,z)dxdydz\,, y_G = \frac{1}{M}\iiint_U \gamma(x,y,z)dxdydz$$

$$z_G = \iiint_U \gamma(x,y,z)dxdydz.$$