Fonctions de plusieurs variables

I. Différentiabilité

Cas de deux variables

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$
- f est différentiable au point (x_0,y_0) $\Leftrightarrow$ $\lim_{\|(h,k)\|\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|} = 0.$
- $df\big((x_0,y_0)\big) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: $df(x_0,y_0)\,(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,k =<\nabla f(x_0,y_0),(h,k)>.$
- La dérivée directionnelle de f suivant la direction v(a,b) au point(x_0,y_0):
  $D_v(x_0,y_0)= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}$,si f est diff^{ble} alors $D_v(x_0,y_0) =<\nabla f(x_0,y_0),v>$
- $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *continues dans U alors* f de Classe C^1 dans U. (U : *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$)
- Toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordres n sont continues dans U alors f est de Classe C^n dans U.
- Si f est de classe C^2 dans U alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ $\forall (x,y)\in U.$

  (Idem pour les fonctions de n variables n$\geq$ 3)

	$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$	$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$
f est différentiable	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy.$ $\nabla f = gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$ $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$
f est de classe C^2	$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$	$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz+$ $2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2.$
d.l à l'ordre 2	$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0)+$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+\frac{1}{2}[$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2\ ]+\|(h,k)\|^2\varepsilon\big((h,k)\big).$ avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon\big((h,k)\big)=0.$	$f(a+H) = f(a)+\frac{\partial f}{\partial x}(a)h+\frac{\partial f}{\partial y}(a)k+\frac{\partial f}{\partial z}(a)l+\frac{1}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h^2$ $+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a)hk+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(a)hl+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(a)kl+$ $+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)k^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)l^2]+\|H\|^2\varepsilon(H).$ avec $H=(h,k,l)$ et $\lim_{H\to(0,0,0)}\varepsilon(H)=0.$

- Soient P(x,y) et Q(x,y) de classe C^1 : *P(x,y)dx+Q(x,y)dy* est totale ssi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$
- Soient P(x,y,z) ,Q(x,y,z) et R(x,y,z) de classe C^1 ,la forme différentielle
  P(x,y,z) dx+ Q(x,y,z) dy + R(x,y,z)dz dy est totale ssi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$ *et* $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$
- L'équation du plan tangent à la surface régulière $f(x,y,z)=0$ au point (x_0,y_0,z_0) s'écrit :
  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

II. Extrema libre

- f est différentiable dans U *et* $a\in U$, f(a) *est un extrémum* $\Rightarrow$ df(a)=0 (a est un point critique)
- si df(a)=0 et f est de classe C^2 : $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *et* $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
- $\Delta = s^2-rt$, $\begin{cases} \Delta<0 \text{ et } r<0 & \Rightarrow f(a) \text{ est un maximun} \\ \Delta<0 \text{ et } r>0 & \Rightarrow f(a) \text{ est un minimun} \\ \Delta>0 & \Rightarrow f(a) \text{ est un point selle} \end{cases}$

  $\Delta = 0$ on ne peut rien conclure, ce cas nécessite une étude plus approfondie (revenir à la définition d'extrémum).
- Matrice Hessienne d'une fonction de classe C^2 :$H_f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)$ i,j=1,...n.

Dans $\mathbb{R}^3$, $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

- Si f est de classe C^2 , H_f est symétrique et toutes ses valeurs propres sont réelles.
- Si H_f (a) est définie positive alors f(a) est un minimum local.
- Si H_f (a) est définie négative f(a) est maximum local.
- Si H_f (a) admet des valeurs propres de signes contraires alors f admet un point selle en a.

III. Extrema liés

$Trouver\ l'extrémum$ de f(x) sous la contrainte g(x)=0, x=$(x_i) i = 1, \dots, n$ revient à chercher $l'extrémum$ de la fonction auxiliaire dite de Lagrange : $\boldsymbol{\Phi(x) = f(x) + \lambda g(x)}$ $\quad$ $\boldsymbol{\lambda}$: ***Multiplicateur de Lagrange***

La condition nécessaire d'extrémum: d$\boldsymbol{\Phi}$(a)=0 **avec la condition** g(a)=0

pour le caractère d'extrémum, on étudie le signe de $d^2\boldsymbol{\Phi}$(a) avec la condition dg(a)=0.

IV. Fonctions vectorielles

- Soit f :U ⊂ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (U :ouvert). Si f est différentiable en a, alors $\mathbf{df}(\boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,sa matrice Jacobienne est donnée par : $\mathfrak{J}_f = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\right)$ i =1,...m. j=1,...n.
- Si n=m,le Jacobien est le déterminent de la matrice Jacobienne : $det(\mathfrak{J}_f) = \frac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}$

V. Fonctions implicites

○ Théorèmes des fonctions implicites

Soit f : $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **et (a,b) un point de** $\boldsymbol{D_f}$**. Si** ✹ **f(a,b)=0 ;** ✹ **f est différentiable au V(a,b) ;** ✹ $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0}$; **Alors** $\exists \boldsymbol{\mathcal{V} = V(a), \mathcal{W} = V(b)}$ **et** $\boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{\mathcal{V} \to \mathcal{W}}$ **continue telle que :** $\boldsymbol{\varphi(a) = b}$ **et f(x,** $\boldsymbol{\varphi}$**(x))=0** $\forall$**x** $\in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ **si f est diff^ble alors** $\boldsymbol{\varphi}$ **est diff^ble et** $\boldsymbol{\varphi'(x)} = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}$	**Soit f :** $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ **t (a,b,c) un point de** $\boldsymbol{D_f}$**. Si** ✹ **f(a,b ,c)=0 ;** ✹ **f est de classe** C^1 **au V(a,b,c) ;** ✹ $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c) \neq 0}$; **Alors** $\exists \boldsymbol{\mathcal{V} = V(a,b), \mathcal{W} = V(c)}$ **et** $\boldsymbol{\varphi}; \boldsymbol{\mathcal{V} \to \mathcal{W}}$ **de classe** C^1 **telle que :**$\boldsymbol{\varphi(a,b) = c}$ **et** $\boldsymbol{f(x,y,\varphi(x,y))}$**=0** $\forall$**x** $\in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ $\boldsymbol{\varphi'_x(x,y)} = -\frac{f'_x(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}$, $\boldsymbol{\varphi'_y(x,y)} = -\frac{f'_y(x,y,\varphi(x,y))}{f'_z(x,y,\varphi(x,y))}$.

○ Théorème des fonctions implicites généralisé (cas vectoriel)

Soit f :$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et (a,b) un point de D_f $avec\ a \in \mathbb{R}^m$ et b $\in \mathbb{R}^n$.

$f(X,Y) = \left(f_1(X,Y), \dots, f_n(X,Y)\right): X = (x_i)_{1 \le i \le m} \in \mathbb{R}^m, Y = (y_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$ Si

- ✹ f (a,b)=0 ;
- ✹ f est de classe C^1 au $\mathcal{V}((a,b))$;
- ✹ $det(\mathfrak{J}_Y(a,b))) \neq 0$ où $\mathfrak{J}_Y = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i\right)$ i , j = 1, … n. où $\mathfrak{J}_X = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i\right)$ i = 1, … , n , j = 1, … m.

Alors $\exists V = \mathcal{V}(a), \mathcal{W} = \mathcal{V}(b)$ et φ; V → $\mathcal{W}$ de classe C^1 telle que :

$\varphi(a) = b$ et $f(X, \varphi(X)) = 0_{\mathbb{R}^n}$ $\ et\ \mathfrak{J}_\varphi(X) = -\mathfrak{J}_Y^{-1}(X, \varphi(X)) . \mathfrak{J}_X(X, \varphi(X))$ $\forall$X ∈ V .

VI. Fonctions inverses

Soit $f: A \to B$ où $A \subset \mathbb{R}^m$ et B $\subset \mathbb{R}^n$.

- f est un homéomorphisme si f est bijective et f ainsi que f^{-1} sont continues.
- f est un C^k –difféomorphisme si f est bijective et f ainsi que f^{-1} sont de classe C^k, k≥ 1.

Soit $f: U \to \mathbb{R}^n$ où U $est\ un\ ouvert\ de$ $\mathbb{R}^n$, une fonction de classe C^k, k≥ 1.

Si $\forall$ $\boldsymbol{a \in U, f'(a)}$ ***est inversible alors f est un*** $\boldsymbol{C^k}$ **–difféomorphisme local autour de a.**

VII. Opérateurs différentiels

Nabla :$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $\vec{\nabla}$f = $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \overrightarrow{grad} f$ où f est un champ scalaire.

Laplacien : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. où f est un champ scalaire

Divergence : div $\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \vec{\nabla}.\vec{f}$ où $f = (f_1, f_2, f_3)$ un champ vectoriel.

Rotationel : rot$\vec{f}$=$\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ =$\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$