Université de Tlemcen
Département de mathématiques
Algèbre 4

A.U. 2017/2018.

Série N° 5

Exercices de révision

Exercice n° 1

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique, f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$M(f)_{e_i} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

1°/ Montrer que f est orthogonale

2°/ Determiner les valeurs propres de f à l'aide de la trace et en remarquant que A est symétrique.

3°/ En déduire la signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, qui dans la base canonique s'écrit $q(x) = -9x_1^2 + 7x_2^2 - 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.

Exercice n° 2

1°/ Soient s et t 2 formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E de dimension finie, s étant non dégénérée.

Montrer qu'il existe un endomorphisme f de E, unique tel que

$$s(f(x), y) = t(x,y) \quad \forall x,y \in E$$

et que l'on a $\quad s(f(x), y) = s(x, f(y)) \; \forall x,y \in E$

2°/ Montrer que si $\lambda \neq \gamma$, les sous espaces propres pour f ; E_λ et E_γ sont orthogonaux pour s et en déduire qu'ils le sont aussi pour t.

3°/ Montrer qu'il existe une base orthogonale à la fois pour s et pour t ssi f est diagonalisable

4°/ Soient $q_s(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

et $q_t(x) = (1+a)x_1^2 + x_2^2 + (1+a)x_3^2 - 2x_1x_2 - 2(1+a)x_1x_3 + 2x_2x_3$

Pour quelle valeur de a, existe-t-il une base orthogonale à la fois pour q_s et q_t, determiner une telle base si elle existe.