Université de Tlemcen
Département de mathématiques
Algèbre 4

A.U. 2017/2018

Série sur "Les formes bilinéaires et formes quadratiques" "Suite"

N°4

Exercice n° 8

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, b une forme bilinéaire symétrique définie sur E. Montrer que E admet une base orthonormée pour b ssi b est définie positive.

Exercice n° 9

Déterminer une base orthogonale pour les formes quadratiques suivantes ainsi que les signatures.

1/ $q_1(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3$

2/ $q_2(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

3/ $q_3(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3$.

Exercice n° 10

Déterminer une base orthogonale pour les formes quadratiques suivantes :

a/ $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3$.

b/ $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 10x_2x_3$.

c/ $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$

d/ $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

Exercice n° 11

Soit (E, q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q, F et G deux sous espaces vectoriels de E.

a/ Montrer que :

1/ $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$; 2/ $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$; 3/ $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$

b/ Montrer que si q est non dégénérée dans 3/ on a l'égalité.

Exercice n° 12

Soit q la forme quadratique, qui dans la base canonique est définie par $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3 .$$

Déterminer les vecteurs isotropes de q et vérifier que $N(q) \subset I(q)$.

Exercice n° 13.

Déterminer la signature et le noyau des formes quadratiques qui sont définies dans la base canonique par :

$$q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$q_2(x) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_3 .$$

Exercice n° 14

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto q(x) = \det x$$

a/ Montrer q est une forme quadratique, déterminer $M(q)_e$ et $rg(q)$
[$\{e\}$ étant la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$]

b/ Déterminer une base $\{v_i\}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ orthogonale pour q, les vecteurs isotropes de q et $Sgn(q)$.

c/ Soit $F = \{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \mathrm{Tr}\, A = 0 \}$, déterminer $F^\perp$

Exercice n° 15

Construire une matrice symétique non diagonale $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a une valeur propre strictement positive, une valeur propre strictement négative et une valeur propre nulle.

Exercice n° 16

1/ Voilà, bon courage et bonne continuation pour la suite dans tous les domaines

2/ Travaillez, Travaillez

3/ Ramadhan Moubarak, Tsoumou. Be Essaha Wa Essahr.

THE END.