Université de Tlemcen. A.U. 2017/2018.
Département de mathématiques.
Algèbre 3

Série sur les formes bilinéaires et formes quadratiques

Série N° 3.

Exercice n° 1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire sur E, non nécessairement symétrique, on définit q par :

$$\forall u \in E \qquad q(u) = b(u,u)$$

1°/ Montrer que : $\forall u,v \in E \quad q\big(q(u)v - b(u,v)u\big) = q(u)\big(q(u)q(v) - b(u,v)b(v,u)\big)$

2°/ Montrer que si b est définie positive alors :

$$\forall u,v \in E \quad b(u,v)\,b(v,u) \leq q(u)\,q(v).$$

Exercice n° 2

Soit b la forme $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1$$

1°/ Montrer que b est bilinéaire et symétrique.

2°/ Déterminer la matrice associée à b dans la base canonique

3°/ Déterminer le noyau et le rang de b

Exercice n° 3

Soit $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ défini dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ par $q(A) = \det A$

1°/ Montrer q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

2°/ Déterminer la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et le rang de q.

3°/ Déterminer $I(q)$, le cône isotrope de q.

Exercice n° 4

Soit l'application $q : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$P \longmapsto q(P) = \int_{-1}^{1} P(x)P''(x)\,dx$$

1°/ Montrer q est une forme quadratique et donner sa forme polaire.

2°/ Determiner la matrice associée à q dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et le rang de q.

3°/ Determiner la matrice associée à q dans la base $\{1+X, 1+X^2, X+X^2\}$

4°/ Determiner le cône isotrope de q.

Exercice n° 5

1°/ Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire definie dans la base canonique $\{e_i\}$ par :

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_1 - 2x_3y_3.$$

Determiner $M(f)_{e_i}$, $rg(f)$ et éventuellement la forme quadratique associée.

2°/ Mêmes questions pour $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Exercice n° 6

Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

1°/ Determiner la forme polaire s de q

2°/ Determiner $rg(s)$, dim $N(s)$, s est elle dégénérée ?

3°/ Soient $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2' = (2,-1,0)$

a/ Démontrer qu'on peut trouver un element non nul. e_3' de $\mathbb{R}^3$ tel que $\{e_1, e_2', e_3'\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour s

b/ Determiner l'expression de s dans la base $\{e_1, e_2', e_3'\}$.

c/ Determiner l'ensemble des éléments isotropes pour s.

Exercice n° 7

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definie dans la base canonique par.

$$q(x) = x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$$

et F le sous espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

1°/ Determiner $F^{\perp}$ et verifier que $N(q) \subset F^{\perp}$

2°/ Determiner $F^{\perp\perp}$ et verifier que $F^{\perp\perp} = F + N(q)$.