Université de Tlemcen A.U. 2017/2018

Département de mathématiques.

Algèbre 4.

# Série sur les espaces euclidiens. N° 2.

## Exercice n° 1

Préciser la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, qui dans la base canonique est représenté par :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## Exercice n° 2

Soit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base orthogonale d'un espace euclidien $E$, $f$ un endomorphisme de $E$. On dit que $f$ conserve l'orthogonalité de $B$ si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ est orthogonale.

Montrer que pour tout $f \in End(E)$, il existe une base orthogonale de $E$ dont $f$ conserve l'orthogonalité.

## Exercice n° 3

Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

## Exercice n° 4

Soit $f$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$ tel que $\forall x \in E$ $\langle f(x), x \rangle = 0$. Montrer que $f \equiv 0$

Exercice n° 5

Soit $E$ un espace euclidien et $u$ un endomorphisme de $E$

1°/ Montrer que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$

2°/ Supposons maintenant que $u$ vérifie $u^2 = 0$, montrer alors que $\operatorname{Ker}(u+u^*) = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^*$.

Exercice n° 6

Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$ et $f = u^* \circ u$

1°/ Montrer que $f$ est symétrique.

2°/ Montrer qu'il existe une orthogonale $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $E$ telle que :

$$\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = 0 \quad \forall i,j \in \{1, \dots, n\} \quad i \neq j$$

Devoir n° 1 (A faire à la maison)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \;/\; P = 0 \text{ ou } d°P \leq n\}$ et l'application $f$ définie par

$$f : E_n \times E_n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(P, Q) \longmapsto f(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(x)\, Q(x)\, dx$$

1°/ Montrer que $f$ un P.S. sur $E_n$.

2°/ On considère la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ de $E_3$, le P.S étant celui défini dans le (1°); en déduire une base orthonormée composée de 4 polynômes de degrés distincts et dont le premier élément est un polynôme constant.

3°/ Trouver en appliquant (2°) le polynôme $A(x) = a_1 + a_2 X + a_3 X^2 + X^3$ tel que $\int_{-1}^{1} A^2(x)\, dx$ soit minimum.