Université de Tlemcen. A.U. 2017/2018

Département de mathématiques

Algèbre 4

Série sur les espace euclidiens.

N° 1

Exercice n° 1

Pour quelle valeur de λ la forme bilinéaire f ci-dessous est elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = x_1y_1 + 6x_2y_2 + 3x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3\lambda x_1y_3 + 3\lambda x_3y_1$$

Exercice n° 2

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, montrer que

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,Q) &\longmapsto \varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur E.

Exercice n° 3

On munit $\mathbb{R}^4$ de la forme bilinéaire f définie dans la base canonique par :

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + 18x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_4 + 2x_4y_2 + 6x_3y_4 + 6x_4y_3$$

a/ Montrer que f définit un P.S sur $\mathbb{R}^4$

b/ Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$,

c/ Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$F = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;/\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Déterminer $F^{\perp}$

Exercice n° 4

Soit E un espace euclidien, $f : E \longrightarrow E$ une application surjective telle que $\forall x,y \in E$ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$; montrer que f est linéaire.

Exercice n°5

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique orthonormaliser en suivant le procédé de Shmidt la famille $\{u, v, w\}$ où $u = (1,0,1)$; $v = (1,1,1)$, $w = (-1,1,0)$.

Exercice n°6

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du P.S. canonique.

1/ Determiner une base orthonormée du sous espace F de $\mathbb{R}^4$, engendré par $u_1 = (1,0,0,-1)$ et $u_2 = (-1,-1,1,1)$.

2/ Determiner $F^\perp$

3/ En déduire une base orthonormée de $F^\perp$ et une base orthonormée B de $\mathbb{R}^4$, autre que la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice n°7

Soit F un sous espace vectoriel d'un espace euclidien E , f un endomorphisme orthogonal de E. Montrer que $f(F^\perp) = f(F)^\perp$

Exercice n°8

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien tel que.

$$\forall x \in E \quad \langle f(x), x \rangle = 0$$

Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

Exercice n°9

Soient A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1/ Montrer que : ${}^tXAY = 0 \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \iff A = 0$

2/ Montrer que ${}^tXBY = {}^tXCY \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \iff B = C$.

3/ Montrer que ${}^tXBY = {}^tYCX \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \iff B = {}^tC$

Exercice n°10

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien et P un endomorphisme de E tel que $P \circ P = P$ et $\forall x, y \in E \ \langle P(x), y \rangle = \langle x, P(y) \rangle$

Montrer que $E = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$ et $(\operatorname{Im} P)^\perp = \operatorname{Ker} P$.