Lemme :

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, $E_1, \dots, E_p$ des sous espaces vectoriels de E stables par f (ie $f(E_i) \subset E_i$), $f : E \longrightarrow E$ endo. et $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$.
Alors si $B_1, \dots, B_p$ sont des bases de $E_1, \dots, E_p$ respectivement alors on a :

$$M(f)_B = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & 0 \\ & \boxed{M_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix} \quad \text{où } M_i = M(f/_{E_i})_{B_i} \text{ et } B = \{B_1, \dots, B_p\}$$

$B_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\}, \dots, B_p = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_p}\}$.

$e_1 \in E_1 \Rightarrow f(e_1) \in f(E_1) \xRightarrow{f(E_1) \subset E_1} f(e_1) \in E_1$.

$f(e_1) \in E_1 \xRightarrow{\{e_1, \dots, e_{n_1}\} \text{ base de } E_1} f(e_1) = a_{11} e_1 + \dots + a_{n_1 1} e_{n_1}$.

— —

$f(e_{n_1}) \in E_1 \Longrightarrow f(e_{n_1}) = a_{1n_1} e_1 + \dots + a_{n_1 n_1} e_{n_1}$

$f(\varepsilon_1) \in E_p \Longrightarrow f(\varepsilon_1) = b_{11} \varepsilon_1 + \dots + b_{n_p 1} \varepsilon_{n_p}$.

$f(\varepsilon_{n_p}) \in E_p \Longrightarrow f(\varepsilon_{n_p}) = b_{1 n_p} \varepsilon_1 + \dots + b_{n_p n_p} \varepsilon_{n_p}$.

$$\Longrightarrow M(f)_B = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{n_1} \\ \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n_p} \end{array} \begin{array}{c} f(e_1) \cdots f(e_{n_1}) \cdots f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_{n_p}) \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n_1 1} & \cdots & a_{n_1 n_1} \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n_p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n_p 1} & \cdots & b_{n_p n_p} \end{matrix}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f/_{E_i} \quad \underset{\{B_i\}}{E_i} \longrightarrow \underset{\{B_i\}}{E_i}$$
$$x \longmapsto f/_{E_i}(x) = f(x).$$

Démonstration du théorème ①.

$P_f(X)$ scindé $\Rightarrow P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ $\quad \lambda_i \neq \lambda_j$; $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = n$.

$\xrightarrow{Rq ①} E = N\lambda_1 \oplus \cdots \oplus N\lambda_p$ et d'après Rq ③ $f(N\lambda_i) \subset N\lambda_i$.

$\xrightarrow{\text{lemme}}$ il existe une base B de E $B = \{B_1, \ldots, B_p\}$ où B_i est une base de $N\lambda_i$ telle que

$$M(f)_B = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_p} \end{pmatrix}$$ où $M_j = M(f/N\lambda_j)_{B_j}$, on pose $f/N\lambda_j = f_j$.

Il reste à montrer que M_j est trigonalisable et que $S_p(M_j) = \underbrace{\{\lambda_j, \ldots, \lambda_j\}}_{\alpha_j \text{ fois}}$.

$$f_j : N\lambda_j \longrightarrow N\lambda_j$$
$$x \longmapsto f_j(x) = f(x).$$

$N\lambda_j = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_j I_d)^{\alpha_j} \Rightarrow (f-\lambda_j I_d)^{\alpha_j}(x) = 0 \ \forall x \in N\lambda_j \Rightarrow (f_j - \lambda_j I_d)^{\alpha_j}(x) = 0 \ \forall x \in N\lambda_j$

$\Rightarrow (f_j - \lambda_j I_d) \equiv 0 \Rightarrow (X-\lambda_j)^{\alpha_j}$ est un polynôme annulateur de f_j

$\Rightarrow m_{f_j}(X)$ est un diviseur de $(X-\lambda_j)^{\alpha_j} \Rightarrow m_{f_j}(X) = (X-\lambda_j)^{\gamma_j}$ $\quad 1 \leq \gamma_j \leq \alpha_j$.

$\Rightarrow P_{f_j}(X) = (-1)^{\delta_j}(X-\lambda_j)^{\delta_j}$ avec $\delta_j \geq \gamma_j \Rightarrow P_{f_j}(X)$ est scindé et

$S_p(f_j) = \underbrace{\{\lambda_j, \ldots, \lambda_j\}}_{\delta_j \text{ fois}}$; Il reste à montrer que $\delta_j = \alpha_j$.

$P_f(X) = \det(M(f)_B - XI) = \det(M_1 - XI_1) \cdots\cdots \det(M_p - XI_p)$.

$\quad = P_{f_1}(X) \cdot P_{f_2}(X), \ldots P_{f_j}(X) \cdots P_{f_p}(X) = (-1)^{\delta_1}(X-\lambda_1)^{\delta_1} \cdots\cdots (-1)^{\delta_j}(X-\lambda_j)^{\delta_j} \cdots (-1)^{\delta_p}(X-\lambda_p)^{\delta_p}$

$= (-1)^{\delta_1 + \cdots + \delta_p}(X-\lambda_1)^{\delta_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{\delta_p} = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\delta_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{\delta_p}$.

or $P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p}$.

$\Rightarrow (X-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (X-\lambda_p)^{\alpha_p} = (X-\lambda_1)^{\delta_1} \cdots\cdots (X-\lambda_p)^{\delta_p}$.

$\Rightarrow \alpha_j = \delta_j \ \forall j \in \{1, \ldots, p\}$ en utilisant le résultat suivant :

« $\left.\begin{matrix}(X-a)^{\alpha}(X-b)^{\beta} = (X-a)^{\gamma}(X-b)^{\theta} \\ \alpha \geq \gamma \ ; \beta \geq \theta \quad a \neq b\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\alpha = \gamma \\ \text{et} \\ \beta = \theta\end{matrix}$ » ; je vous laisse le soin de le montrer.

Ci-dessous une belle citation de l'Emir Abdelkader : 1808-1883.

" Ne demandez jamais quelle est l'origine d'un homme, interrogez plutôt sa vie, son courage, ses qualités et vous saurez ce qu'il est. "