Module : Algèbre 3

Théorème de Cayley - Hamilton.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, $(\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $P_f(X)$ le polynôme caractéristique de f alors $P_f(f)=0$

Demonstration

1er cas $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, dans ce cas f est trigonalisable $\Rightarrow$ il existe (e_i) une base de E telle que

$$M(f)_{e_i} = \begin{array}{c|c} & f(e_1), \dots\ f(e_i)\ \ f(e_n) \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_1 & & \\ & \lambda_2 & a_2 & \times & \\ & 0 & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \quad (1)$$

$\Rightarrow P_f(X) = (\lambda_1 - X) \dots (\lambda_n - X)$, il s'agit de montrer que $P_f(f)=0$

c'est à dire $(\lambda_1 I_d - f)\circ(\lambda_2 I_d - f)\circ\dots\circ(\lambda_n I_d - f) = 0$?

Considérons l'application

$$g_i = (\lambda_1 I_d - f)\circ(\lambda_2 I_d - f)\circ\dots\circ(\lambda_i I_d - f)$$

et montrons par récurrence que g_i annulle les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_i$.

- pour $i=1$ montrons que $g_1(e_1)=0$?

en effet $g_1(e_1) = (\lambda_1 I_d - f)(e_1) = \lambda_1 I_d(e_1) - f(e_1) = \lambda_1 e_1 - f(e_1) = 0$ d'après (1)

- Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $(i-1)$, c'est à dire :

$$g_{i-1}(e_1)=0,\ g_{i-1}(e_2)=0; \dots, g_{i-1}(e_{i-1})=0$$

et montrons que le résultat est vrai à l'ordre i, c'est à dire

$$g_i(e_1)=0, \dots, g_i(e_i)=0$$

On a : $g_i = g_{i-1}\circ(\lambda_i I_d - f) = (\lambda_i I_d - f)\circ g_{i-1}$

$\Rightarrow g_i(e_1) = [(\lambda_i I_d - f)\circ g_{i-1}](e_1) = (\lambda_i I_d - f)(g_{i-1}(e_1)) \overset{\text{Hyp Rec}}{=} (\lambda_i I_d - f)(0)$.

$= 0$ car $(\lambda_i I_d - f)$ est linéaire.

de même $g_i(e_2) = \dots g_i(e_{i-1}) = 0$.

Il reste à montrer que $g_i(e_i)=0$

$g_i(e_i) = \left(g_{i-1} \circ (\lambda_i Id - f)\right)(e_i).$

$= g_{i-1}\left(\lambda_i e_i - f(e_i)\right)$

$= g_{i-1}\left(\lambda_i e_i - (a_1 e_1 + \dots + a_{i-1} e_{i-1} + \lambda_i e_i)\right)$ d'après (1).

$= g_{i-1}(- a_1 e_1 - \dots - a_{i-1} e_{i-1})$

$= - a_1 g_{i-1}(e_1) - \dots - a_{i-1} g_{i-1}(e_{i-1}).$ car g_{i-1} est linéaire.

$= 0$ d'après l'hypothèse de récurrence .

$\Rightarrow g_i(e_i) = 0$ c.q.f.d.

Conclusion

$\forall i \quad g_i(e_1) = 0, \dots \; g_i(e_{i-1}) = 0, \; g_i(e_i) = 0$

$\Rightarrow g_n(e_1) = 0, \; g_n(e_2) = 0, \dots, g_n(e_n) = 0$

$\Rightarrow g_n : E \to E$ est une application linéaire qui s'annulle sur les elements d'une base par consiquent elle est identiquement nulle $\Rightarrow g_n \equiv 0 \Rightarrow (\lambda_1 Id - f) \circ \dots \circ (\lambda_n Id - f) = 0$

$\Rightarrow P_f(f) = 0$

On vient de montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $P_A(A) = 0$. ①

d'autre part $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{①} P_A(A) = 0$

Par consiquent si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $P_A(A) = 0$

Conclusion : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on a $P_A(A) = 0$ ou $P_f(f) = 0$.

où $A = M(f)$

Ainsi le théorème de Cayley-Hamilton est démontré .