le 23/05/2017 par M. Mebkhout.

VIII) Classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel complexe.

Théorème ②

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E, alors il existe une base $\{e_i\}$ de E telle que dans cette base

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2 \quad \text{où } r = rg(q) \text{ et } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i .$$

c'est à dire

$$M(q)_{e_i} = \begin{array}{c} \overbrace{}^{r \text{ fois}} \\ \left(\begin{array}{cc} \boxed{\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{array} \right) \end{array}$$

Demonstration

Soit $\{\varepsilon_i\}$ une base orthogonale de E pour q (elle existe d'après le théorème 1).

$$\Rightarrow M(q)_{\varepsilon_i} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

On peut supposer, en changeant au besoin la numérotation que $a_1, \ldots, a_r$ sont non nuls et $a_{r+1}, \ldots, a_n$ sont nuls (car $rg\,q =$

Donc si $x = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i \Rightarrow q(x) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_r y_r^2$

$a_i \in \mathbb{C} \Rightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{C} \,/\, a_i = \lambda_i^2$

$\Rightarrow q(x) = (\lambda_1 y_1)^2 + \cdots + (\lambda_r y_r)^2$

en posant $x_i = \lambda_i y_i$ on aura $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_r^2$

c'est à dire que les x_i sont les composantes de x dans une certaine base qui vérifie les conditions du théorème.

Corollaire

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n, q une forme quadratique sur E, alors il existe une base orthonormée de E pour q ssi le rang de q est égal à n ($\mathrm{rg}\, q = n$)

IV) Classification des forme quadratiques sur un espace vectoriel réel.

Théorème de SYLVESTER (Théorème 3)

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n, q une forme quadratique sur E, il existe alors une base $\{e_i\}$ de E telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a :

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

c'est à dire

$$M(q)_{e_i} = \begin{array}{c} p \left\{ \vphantom{\begin{matrix}1\\ \\1\end{matrix}} \right. \\ r-p \left\{ \vphantom{\begin{matrix}1\\ \\1\end{matrix}} \right. \\ \vphantom{\begin{matrix}0\\ \\0\end{matrix}} \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

où $r = \mathrm{rg}(q)$ et p est un entier qui ne dépend que de la forme quadratique et non pas de la base.

Le couple $(p, r-p)$ s'appelle signature de q

et on écrit $sgn(q) = (p, r-p)$.

<u>Demonstration</u>

Soit $\{e_i\}$ une base orthogonale de E pour q (Théorème 1).
donc si $x = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ on a :

$$q(x) = a_1 y_1^2 + \cdots + a_r y_r^2 \qquad r = rg(q). \quad a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}.$$

Supposons que $a_1, \ldots, a_p > 0$ et $a_{p+1}, \ldots, a_r < 0$.

$$\Rightarrow q(x) = (\sqrt{a_1}\, y_1)^2 + \cdots + (\sqrt{a_p}\, y_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}}\, y_{p+1})^2 - \cdots - (\sqrt{-a_r}\, y_r)^2$$

$$\Rightarrow q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

avec $x_i = \sqrt{a_i}\, y_i \quad (i = 1, \ldots, p)$

$x_j = \sqrt{-a_j}\, y_j \quad (j = p+1, \ldots, r.$

Il reste à montrer que p ne dépend pas de la base.
Considérons 2 base $\{e_i\}$ et $\{e_i'\}$ de E

$$\Rightarrow q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 \quad \text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

$$q(x) = x_1'^2 + \cdots + x_{p'}'^2 - x_{p'+1}'^2 - \cdots - x_r'^2 \quad \text{si } x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$$

et montrons que $p = p'$, pour cela considérons les sous espaces vectoriels suivants.

$$F = [e_1, \ldots, e_p] \qquad F' = [e_1', \ldots, e_{p'}']$$

$$G = [e_{p+1}, \ldots e_n] \qquad G' = [e_{p'+1}', \ldots, e_n']$$

$x \in F \Rightarrow q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2$.

$x \in G' \Rightarrow q(x) = -x_{p'+1}'^2 - \cdots - x_r'^2$.

$x \in F \cap G \Rightarrow q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 = -x_{p'+1}'^2 - \cdots - x_r'^2$

$\Rightarrow x_1^2 + \cdots + x_p^2 + x_{p'+1}'^2 + \cdots + x_r'^2 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow F \cap G' \; \{0\} \Rightarrow F \cap G' = \{0\}$ et de la même manière $F' \cap G = \{0\}$

$(F+G')$ est un sous space de $E \Rightarrow \dim(F+G') \leq \dim E$

$\Rightarrow \dim F + \dim G' - \dim(F \cap G') \leq \dim E$

$\Rightarrow p + (n-p') - 0 \leq n \Rightarrow p \leq p'$ ①

d'autre part $F'+G$ est aussi un sous space de $E \Rightarrow \dim(F'+G) \leq \dim$

$\Rightarrow \dim F' + \dim G - \dim(F' \cap G) \leq \dim E$.

$\Rightarrow p' + (n-p) - 0 \leq n \Rightarrow p' \leq p$ ②

① et ② $\Rightarrow p = p'$ c.q.f.d.

Corollaire :

Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ev E de dimension finie alors :

1/ q est définie positive $\Leftrightarrow sgn(q) = (n,0)$.
(E euclidien)

2/ q est non dégénérée $\Leftrightarrow sgn(q) = (p, n-p)$.
$N(q) = \{0\}$

Exercice : Determiner la signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, définie dans la base canonique par :

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$$

Solution

GAUSS $\Rightarrow q(x) = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - 2(x_2 - x_3)^2 - 8x_3^2$.

on pose $x_1' = (x_1 - 2x_2 + 3x_3)$

$x_2' = \sqrt{2}(x_2 - x_3)$

$x_3' = \sqrt{8}\, x_3$

$\Rightarrow q(x) = x_1'^2 - x_2'^2 - x_3'^2 \Rightarrow sgn(q) = (1,2)$

X) Endomorphisme adjoint.

Proposition

Soit (E,q) un espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une forme quadratique non dégénérée q, s sa forme polaire, f un endomorphisme de E, alors il existe un et un seul endomorphisme f^* de E telle que :

$$① \quad s(f(x),y) = s(x, f^*(y)) \quad \forall x,y \in E.$$

f^* est dit l'adjoint de f relativement à q.

Demonstration.

Tout d'abord supposons que f^* tel que ① existe et considérons $\{e_i\}$ une base de E, posons alors :

$S = M(s)_{e_i}$; $A = M(f)_{e_i}$, $A^* = M(f^*)_{e_i}$, $X = M(x)_{e_i}$; $Y = M(y)_{e_i}$; $x,y \in E$

$$① \Longrightarrow {}^t(AX)SY = {}^tXS(A^*Y).$$
$$\Longrightarrow {}^tX\,{}^tASY = {}^tXSA^*Y.$$
$$\Longrightarrow {}^tAS = SA^* \xrightarrow[\substack{s \text{ non deg} \\ \Downarrow \\ \det S \neq 0}]{q \text{ non deg}} A^* = S^{-1}\,{}^tAS.$$

ce qui montre l'unicité de f^* tel que ① car même si on suppose qu'un autre g^* existe tel que ① et $B^* = M(g^*)_{e_i}$ on va trouver que $B^* = S^{-1}\,{}^tAS = A^* \Rightarrow g^* = f^*$.

__Existence__ : (la demonstration de l'unicité nous aide.)

Il suffit de choisir f^* tel que $A^* = M(f^*) = S^{-1}\,{}^tAS$.

Exemple : Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratique q définie par $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Q : Déterminer A^*.

Solution

$$A^* = S^{-1}\,{}^tA . S \quad \text{où } S = M(s)_{e_i} = M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & -d \end{pmatrix}$$

Propriété :

Soit s une forme bilinéaire non dégénérée on a :

$$s(x,z) = s(y,z) \ \forall z \in E \Rightarrow x = y.$$

Démonstration

$s(x,z) = s(y,z) \Rightarrow s(x,z) - s(y,z) = 0 \Rightarrow s(x-y,z) = 0 \ \forall z \in E$

$\Rightarrow (x-y) \in N(s) \xrightarrow[N(s)=\{0\}]{s \text{ non deg}} (x-y) \in \{0\} \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$.

Proposition

Pour tout endomorphisme f et g de E, pour tout λ de $\mathbb{K}$ on a :

1°/ $f^{**} = f$; $(I_d)^* = I_d$.

2°/ $(f+g)^* = f^* + g^*$; $(\lambda f)^* = \lambda f^*$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

3°/ $rg\, f^* = rg\, f$, $\det f^* = \det f$.

$\boxed{XI}$) Groupe orthogonal.

Nous allons étudier des endomorphismes f de E qui conservent une forme quadratique i.e :

$$q(f(x)) = q(x) \quad \forall x \in E$$

Proposition

Soit (E,q) un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme quadratique non dégénérée q, s sa forme polaire, f un endomorphisme de E alors les 3 propriétés suivantes sont équivalentes

a/ $q(f(x)) = q(x) \quad \forall x \in E$.

b/ $s(f(x), f(y)) = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$

c/ $f^* \circ f = I_d$ (ou $f \circ f^* = I_d$) en particulier f est bijective.

Un tel endomorphisme est dit endomorphisme orthogonal relativement à q.

Démonstration

ⓐ $\Longleftrightarrow$ ⓑ évident.

ⓑ $\Longleftrightarrow s(f(x), f(y)) = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$

$\Longleftrightarrow s(f(y), f(x)) = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$.

$\Longleftrightarrow s(y, f^*(f(x)) = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$

$\Longleftrightarrow s(f^*(f(x)), y) = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$.

$\Longleftrightarrow (f^* \circ f)(x) = x \quad \forall x \in E$.

$\Longleftrightarrow f^* \circ f = I_d \Longleftrightarrow$ ⓒ

cqfd ⓐ $\Leftrightarrow$ ⓑ $\Leftrightarrow$ ⓒ

Définition :

$$O(q) = \{ f \in End(E) \,/\, f^* \circ f = I_d \}$$
$$= \{ f \in End(E) \,/\, f \circ f^* = I_d \}$$

Proposition

a/ $f, g \in O(q) \Rightarrow (f \circ g) \in O(q)$.

b/ $f \in O(q) \Rightarrow f^{-1} \in O(q)$

$(O(q), \circ)$ est un groupe dit groupe orthogonal de q

Remarque

$f \in O(q) \Rightarrow f^* \circ f = Id \Rightarrow \det(f^* \circ f) = \det Id$.

$\Rightarrow \det f^* . \det f = 1 \Rightarrow (\det f)^2 = 1 \Rightarrow \det f = \pm 1$

Proposition

$SO(q) = \{ f \in O(q) / \det f = 1 \}$ est un sous groupe de $O(q)$ dit groupe spécial orthogonal de q.

Expression matricielle des endomorphismes orthogonaux relativement à q.

Proposition

Soit $\{e_i\}$ une base de E, $S = M(q)_{e_i}$ $A = M(f)_{e_i}$

alors $f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tASA = S$

En particulier si $\{e_i\}$ est une base orthonormée (si elle ex

$f \in O(q) \Leftrightarrow {}^tA.A = I$

Démonstration

$f \in O(q) \Leftrightarrow s(f(x), f(y)) = s(x, y)$ $\forall x, y \in E$

$\Leftrightarrow {}^t(AX) SAY = {}^tX SY$ $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$

$\Leftrightarrow {}^tX ({}^tASA) Y = {}^tX SY$ $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$.

$\Leftrightarrow {}^tASA = S$.

XII) Formes quadratiques dans un espace euclidien

Dans ce paragraphe on suppose que $(E, <,>)$ est un espace euclidien et que sur E est définie aussi une forme quadratique q.

Dans ce cas là, il est important de noter qu'on peut construire des bases qui sont à la fois orthogonales pour le produit scalaire et pour la forme quadratique. Cela permet de simplifier les calculs car dans de telles bases les matrices de $<,>$ et de q sont diagonales.

Théorème 4.

Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien et q une forme quadratique sur E, f un endomorphisme de E, on note s la forme polaire de q. Alors.

1/ Il existe un et un seul endomorphisme f_s de E tel que $\langle x, f_s(y) \rangle = s(x,y) \ \forall x, y \in E$.

2/ f_s est autoadjoint (symétrique), par conséquent f_s est diagonalisable et les sous-espaces propres E_λ sont orthogonaux 2 à 2 pour $<,>$.

En prenant dans chaque E_λ une base orthogonale pour $<,>$ on obtient une base qui est aussi orthogonale pour s. Ainsi il existe une base orthogonale à la fois pour $<,>$ et pour s.

Demonstration

1/ Unicité :

Supposons que f_s (tel que ① $<x, f_s(y)> = s(x,y)\ \forall x,y \in E$) existe et soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E (elle existe car $(E, <,>)$ est euclidien.

Soit $S = M(s)_{e_i}$; $A = M(f_s)_{e_i}$; $X = M(x)_{e_i}$; $Y = M(y)_{e_i}$.

① $\Leftrightarrow\ {}^tX I A Y = {}^tX S Y\ \forall X, Y\ \ \forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow\ S = A$

Si on suppose qu'il existe un autre endomorphisme g_s tq ① et $A' = M(g_s)_{e_i}$, de la même manière on trouve que $S = A'$ d'où $A = A'$ et par conséquent $f_s = g_s$ d'où l'unicité.

Existence : Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de E et $S = M(s)_{e_i}$, il suffit de choisir un endo f_s tel que

$M(f_s) = S$

$\Rightarrow\ <x, f_s(y)> = {}^tX I S Y = {}^tX S Y = s(x,y)$ c.q.f.d

2/ $<x, f_s(y)> \overset{①}{=} s(x,y) \overset{s\ sym}{=} s(y,x) \overset{①}{=} <y, f_s(x)>$

$\overset{<,>\ sym.}{=} <f_s(x), y>\qquad x, y \in E$

Par conséquent $<f_s(x), y> = <x, f_s(y)>\ \forall x, y \in E$

$\Rightarrow f_s$ est symétrique.

Si v_i et v_j sont 2 vecteurs propres de f_s orthogonaux pour <, > alors v_i et v_j sont orthogonaux pour s.

en effet v_i vect propre de $f_s \Rightarrow f_s(v_i) = \lambda_i v_i$

v_j — — $\Rightarrow f_s(v_j) = \lambda_j v_j$

$s(v_i, v_j) = <v_i, f_s(v_j)> = <v_i, \lambda_j v_j> = \lambda_j <v_i, v_j>$

$= 0$ car $<v_i, v_j> = 0$ par hypothèse. c.q.f.d!

Corollaire:

Soit s une forme bilinéaire symétrique sur un $\mathbb{R}$ev. de dimension finie.

On considère une base quelconque $\{e_i\}$ de E et $S = M(s)_{e_i}$

alors on peut construire une base orthogonale de E pour s formée par les vecteurs propres de S.

De plus $Sgn(s) = (n_+, n_-)$.

où n_+ est le nombre de valeurs propres de S, strictement positives.

et n_- est le nombre de valeurs propres de S strictement négatives.

demonstration

Soit $\{e_i\}$ une base de E et soit $<,>$ un P.S défini par $<x,y> = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. les x_i sont les coordonnées de x dans la base $\{e_i\}$ et les y_i sont les coordonnées de y dans $\{e_i\}$

[$<,>$ est appelé P.S. associée à la base $\{e_i\}$].

Th 4 $\Rightarrow$ il existe un seul endo f_s de E tq

$<x, f_s(y)> = s(x,y) \quad \forall x,y \in E$.

$\Rightarrow M(f_s)_{e_i} = S$ car $\{e_i\}$ est orthonormée pour $<,>$

d'après le théorème 4 il existe une base formée par les vecteurs propres de f_s, orthogonale pour $<,>$ et S.

$\Rightarrow$ il existe une base $\{v_i\}$ de E formée par les vecteurs propre de S orthogonale pour s.

d'autre part $s(v_i, v_j) = \langle v_i, f_s(v_j)\rangle$

$$= \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle$$

$$\Rightarrow s(v_i, v_j) = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$s(v_i, v_j) = 0$ pour $i \neq j$

et $s(v_i, v_i) = \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle = \lambda_i \|v_i\|^2$.

$$\Rightarrow M(s)_{v_i} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \|v_1\|^2 & & 0 \\ & \lambda_2 \|v_2\|^2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \|v_n\|^2 \end{pmatrix}$$

rg s est le nombre de valeurs propres non nuls.

et par conséquent $sgn(s) = (n_+, n_-)$. c.q.f.d.

<u>Exercice</u> : Construire une matrice symétrique non diagonale appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant une valeur propre >0, une valeur propre <0 et une valeur propre nulle.

<u>Solution</u> : il suffit de considérer une forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $sgn(q) = (1,1)$ i.e $rg\, q = 2$

par exemple $q(x) = \underbrace{(x_1+x_2)^2}_{p=1} - \underbrace{x_3^2}_{r=2}$ $\quad sgn(q) = (1, 2-1) = 1$

$$\Rightarrow q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2$$

$$\Rightarrow M(q)_{e_i} = M(s)_{e_i} = S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifions $P_S(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda).\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = -(\lambda+1)\lambda(\lambda-2)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0 \quad \lambda_2 = -1 < 0 \quad \lambda_3 = 0$

THE END

J'espère que nous avons passé une belle année ensemble, je vous souhaite du courage et plein de succès pour la suite et sachez qu'on ne peut pas réussir sans travailler, c'est la loi de la VIE