le 22/05/2017 | Reste du chapitre "Première partie"

"Formes bilinéaires et formes quadratiques" M. Melokhou

IV) Rang, Noyau et vecteurs isotropes d'une forme quadratique.

Définition:

- on appelle rang, noyau et matrice d'une forme quadratique q, le rang, le noyau, la matrice de la forme polaire associée à q.
- q est dite non dégénerée si la forme polaire s est non dégénerée i.e: $[s(x,y)=0 \ \forall x \in E] \Longleftrightarrow x=0$.
- q est dite définie positive si la forme polaire s est définie positive i.e: $q(x) \geq 0$ et $q(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Definition

Soit q une forme quadratique sur E, on appelle cône isotrope de q l'ensemble

$$I(q) = \{x \in E / q(x)=0\}$$

et les vecteurs x de E tels que $q(x)=0$ sont appelés vecteurs isotropes.

Exemple: Soit $q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique qui dans la base canonique est définie par:

$$q(x) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_1x_2 + 8x_2x_3 - 3x_1x_3$$

Q: Determiner $M(q)_{e_i}$

R: $M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 4 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & -3 & 4 \\ -3/2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$N(q) = N(s) = \{y \in \mathbb{R}^3 / s(x,y) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3\} \neq \{x \in \mathbb{R}^3 / q(x) = 0\}$

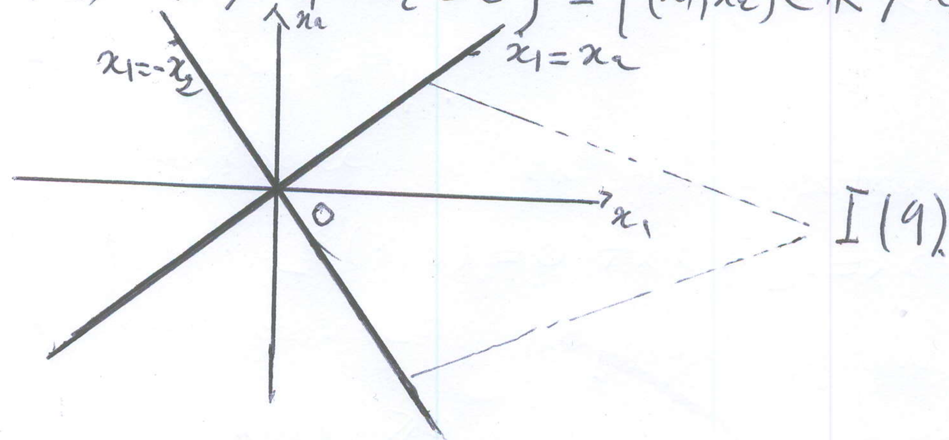
Remarque : $I(q)$ n'est pas un sous espace vectoriel de E.

Exemples :

1°/ $E = \mathbb{R}^2$ q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
par $q(x) = x_1^2 - x_2^2$.

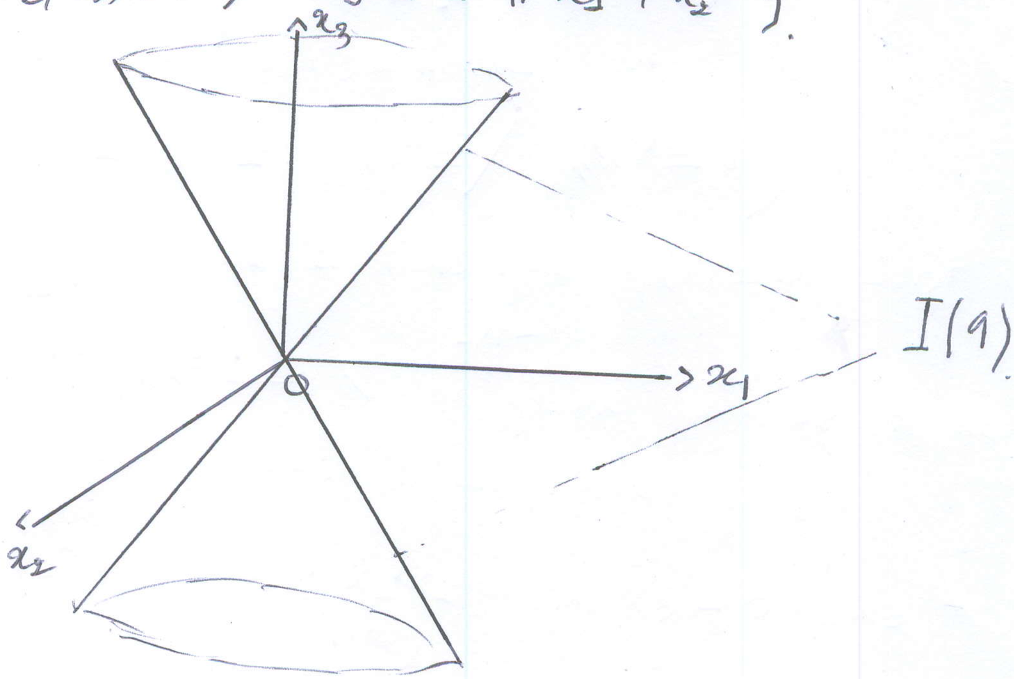
Q: Determiner $I(q)$.

R: $I(q) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 - x_2^2 = 0\} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 = \pm x_2\}$



2°/ $E = \mathbb{R}^3$ et $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ $I(q) = ?$

$I(q) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$
$= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$.



Rq: $N(q) = N(s)$ $= \{y \in \mathbb{R}^3 / s(x,y) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^3\}$
$= \{y \in \mathbb{R}^3 / x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0 \ \forall x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$
$= \{0\}$.

Propriété.

$$N(q) \subset I(q).$$

Demonstration

$y \in N(q) \Rightarrow s(x,y) = 0 \quad \forall x \in E$ en particulier pour $x =$

$\Rightarrow s(y,y) = 0 \Rightarrow q(y) = 0 \Rightarrow y \in I(q)$.

cl : $N(q) \subset I(q)$.

Résumé

Si s est la forme polaire de q.

- $q(x) = s(x,x)$.
- $s(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right]$.
- Noyau : $N(q) = \{y \in E \,/\, s(x,y) = 0 \ \forall x \in E\}$.
- Cône isotrope $I(q) = \{x \in E \,/\, q(x) = 0\}$.
- $N(q) \subset I(q)$
- q est dite non dégénérée si $N(q) = \{0\}$
- q est dite définie positive si $q(x) \geq 0$ ~~$\forall x \in E$~~ et $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- En dimension finie $\dim E = \dim N(q) + rg(q)$.

V) Sous espace orthogonaux.

Comme dans le cas d'un produit scalaire, on dit que 2 vecteurs x et y de E sont orthogonaux pour la forme bilinéaire s si $s(x,y) = 0$ et on écrit $x \underset{s}{\perp} y$.

Définition

Soit A un sous ensemble de A ($A \subset E$), A pas necessairement un ssev de A. On appelle orthogonal de A pour la forme bilinéaire s l'ensemble.

$$A^{\perp} = \{x \in E \,/\, s(x,a) = 0 \ \forall a \in A\}.$$

Propriétés

1- $A^\perp$ est un ssev de A (même si A ne l'est pas).

2- $\{0\}^\perp = E$

3- $E^\perp = N(q)$.

4- $\forall A \subset E \quad N(q) \in A^\perp$

Corollaire.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un ssev. de E alors.

1/ $\dim E = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap N)$ où $N = N(q)$.

2/ $F^{\perp\perp} = F + N$.

En particulier : si q est non dégénerée

- $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$.
- $F^{\perp\perp} = F$.

Sous espace isotropes.

Nous nous proposons maintenant de regarder dans quel cas on a $E = F \oplus F^\perp$ comme dans le cas des espaces euclidiens. Pour cela il est necessaire que $F \cap F^\perp = \{0\}$, or ceci n'est pas toujours vrai même si q est non dégénerée

En effet soit v un vecteur isotrope non nul et $F = [v]$

v est isotrope $\Rightarrow q(v) = 0 \Rightarrow S(v,v) = 0 \Rightarrow v \underset{s}{\perp} v \Rightarrow v \in F^\perp$

or $v \in F$, donc $v \in F \cap F^\perp$ ce qui implique $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ car $v \neq$

Définition.

Un sous space F de E est dit isotrope si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$, on vient de voir que si $I(q) \neq 0$ il existe des sous spaces isotropes.

Réciproquement si on a un sous espace F isotrope

$\Rightarrow F \cap F^{\perp} \neq \{0\} \Rightarrow \exists v \in (F \cap F^{\perp}) \,/\, v \neq 0.$

$\Rightarrow v \in F$ et $v \in F^{\perp}$ $(v \neq 0)$.

$\Rightarrow s(v, v) = 0 \Rightarrow q(v) = 0 \Rightarrow v \in I(q)$.

On vient de montrer que tout sous espace isotrope contient des vecteurs isotropes non nuls, en particulier il existe ~~toujours~~ des sous espaces isotropes ssi $I(q) \neq 0$, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 4

Si E est de dimension finie, F un sous espace de E alors

$$E = F \oplus F^{\perp} \Leftrightarrow F \text{ est non isotrope } (\text{ie } F \cap F^{\perp} = \{0\})$$

Démonstration

$\Rightarrow$ (évident)

$\Leftarrow$ Hyp $F \cap F^{\perp} = \{0\}$

$F \subset E \xrightarrow{\text{prop.}} N(q) \in F^{\perp} \Rightarrow N(q) \cap F \subset F \cap F^{\perp} \Rightarrow N(q) \cap F \subset \{0\}$

$\Rightarrow N(q) \cap F = 0 \Rightarrow \dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$ or $F \cap F^{\perp} = \{0\}$

par conséquent $E = F \oplus F^{\perp}$ c.q.f.d.

V) Base orthogonales.

Une base $\{e_i\}$ de E est dite orthogonale pour la forme bilinéaire s si $s(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Elle est dite orthonormée si $s(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.

Remarque : 1) Une base $\{e_i\}$ est orthogonale ssi

$$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ou d'une autre manière.

$$q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right).$$

2/ Une base $\{e_i\}$ est dite orthonormée ssi.

$$M(q)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ou bien d'une autre manière.

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right).$$

(*) Donc chercher une base orthogonale revient à déterminer une base dans laquelle la matrice de q est diagonale. ou aussi à écrire q comme la somme de termes carrés.

Remarque: Il ne faut pas confondre ce problème (*) avec la diagonalisation des endomorphisme.
Si A est la matrice d'un endomorphisme, la diagonaliser signifie, chercher une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale. Ici il s'agit de chercher une matrice P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Théorème 1

Soit (E, q) un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique alors il existe toujours des bases orthogonales pour q.

Démonstration

Faisons une récurrence sur $n = \dim E$

Pour $n=1$ il n'y a rien à montrer.
Supposons que le résultat est vrai à l'ordre $(n-1)$ ie.
Si $\tilde{q} : F \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur F ($\dim F = n-1$) alors il existe une base orthogonale de F pour $\tilde{q}$.

Montrons que le résultat est vrai à l'ordre n ie le théorème.

$\left.\begin{array}{l} q : E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ f. quadratique sur } E \\ \dim E = n. \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$ une base orthogonale de E pour q.

- Si $q \equiv 0$ le théorème est évident car toutes les bases sont orthogonales.

- Si $q \neq 0$, considérons $v \in E$ ($v \neq 0$) tq $q(v) \neq 0$ et $F = [v]$

F est non isotrope, en effet :

$x \in F \cap F^\perp \Rightarrow x \in F$ et $x \in F^\perp \Rightarrow x = \lambda v$ et $x \in F^\perp$.

d'autre part $s(\underset{F}{v}, \underset{F^\perp}{x}) = 0 \Longrightarrow s(v, \lambda v) = 0 \Rightarrow \lambda s(v,v) = 0$

$\Rightarrow \lambda q(v) = 0 \overset{q(v)\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = 0 \Rightarrow x = \lambda v = 0 \Rightarrow x \in \{0\}$.

$\Rightarrow F \cap F^\perp \subset \{0\} \Rightarrow F \cap F^\perp = \{0\} \Rightarrow F$ non isotrope $\Rightarrow E = F \oplus F^\perp$

$\dim F = 1 \Rightarrow \dim F^\perp = n-1$.

Soit $\tilde{q} = q_{/F^\perp} : F^\perp \longrightarrow \mathbb{R}$. $\dim F^\perp = n-1$

$\overset{\text{Hyp Rec}}{\Longrightarrow}$ il existe $\{e_2, \ldots, e_n\}$ une base orthogonale de F.

$\Longrightarrow \{v, e_2, \ldots, e_n\}$ est une base orthogonale de E pour q.

c.q.f.d.

VII) Recherche d'une base orthogonale par la méthode de GAUSS.

Pour chercher une base orthogonale, la méthode de

SCHMIDT risque de ne pas pouvoir s'appliquer, en effet lors des calculs, on est amené par diviser par $q(e_i)$ et ce scalaire peut être nul (c'est le cas des vecteurs isotropes), c'est pourquoi quand l'espace n'est pas euclidien, on utilise la méthode de GAUSS.

a/ <u>Réduction en carrés d'une forme quadratique</u>.

1er cas : Cas d'une forme quadratique qui ne comporte que des termes rectangles.

$$q(x) = a_{12} x_1 x_2 + a_{13} x_1 x_3 + \dots + a_{ik} x_i x_k + \dots$$

<u>exemple</u> :

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto q(x) = 5x_1 x_2 + 6x_1 x_3 + 3x_2 x_3 .$$

1/ On choisit un terme rectangle à coefficient non nul. ($k x_i x_j \neq 0$) par ex $5x_1 x_2$.

2/ On calcule les dérivées q'_{x_i} et q'_{x_j}.

ex : $q'_{x_1} = 5x_2 + 6x_3$; $q'_{x_2} = 5x_1 + 3x_3$.

3/ On écrit $q(x) = \frac{1}{k} q'_{x_i} \cdot q'_{x_j}$ + termes correctifs.

ex : $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 3x_3) - \frac{18}{5} x_3^2$.

4/ On aura une expression du type :

$q(x) = \frac{1}{k} \varphi_1(x) \varphi_2(x)$ + terme correctifs ne contenant ni x_i ni x_j où φ_1 et φ_2 sont deux formes linéaires.

ex : $q(x) = \frac{1}{5} \varphi_1(x) \varphi_2(x)$ + terme correctif ne contenant ni x_1 ni x_2

5/ On écrit $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ sous la forme.

$$\varphi_1(x)\varphi_2(x) = \frac{1}{4}\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right)^2$$

ex : $q(x) = \frac{1}{20}\left(\underbrace{5x_1+5x_2+9x_3}_{\psi_1(x)}\right)^2 - \frac{1}{20}\left(\underbrace{-5x_1+5x_2+3x_3}_{\psi_2(x)}\right)^2$

$$- \frac{18}{5}\underbrace{x_3^2}_{\psi_3(x)}.$$

<u>Proposition</u> :

Les forme linéaires ainsi obtenues sont linéairement indépendantes.

b/ Recherche d'une base orthogonale.

Soit $q(x) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + \cdots + a_{ij}x_ix_j + \cdots$

où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

D'après le théorème 1 on peut toujours trouver une base orthogonale $\{v_i\}$ de E.

$x \in E \xrightarrow{\{v_i\}\text{ base}} x = x_1' v_1 + \cdots + x_n' v_n$.

$\Longrightarrow q(x) = b_1 x_1'^2 + \cdots + b_n x_n'^2$ où $b_i = s(v_i, v_i) = q($

c'est à dire $M(q)_{v_i} = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}$.

Si $X = M(x)_{e_i} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = M(x)_{v_i} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

on a $X' = P^{-1}X$ ou $X = PX'$ avec $P = P_{e_i \to v_i}$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & & l_{1n} \\ & & \\ l_{n1} & & l_{nn} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x'_1 = l_{11}x_1 + \dots + l_{1n}x_n = \varphi_1(x)$

$\vdots$

$x'_n = l_{n1}x_1 + \dots + l_{nn}x_n = \varphi_n(x)$.

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes ($\det P \neq 0$).

$\Rightarrow q(x) = b_1 \varphi_1^2(x) + \dots + b_n \varphi_n^2(x)$

<u>Conclusion</u>

Trouver une base orthogonale revient à écrire q comme somme des carrés de formes linéaires, linéairement indépendantes.

<u>Exemple</u>

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique
$\quad x \longmapsto q(x)$

par $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$

<u>Question</u>: Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

<u>Solution</u>:

1) GAUSS $\Rightarrow q(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2^2 + 4x_2x_3) + 7x_3^2$.

$\Rightarrow q(x) = (x_1+x_2)^2 + 2(x_2+2x_3)^2 - x_3^2$

$\Rightarrow q(x) = \varphi_1^2(x) + 2\varphi_2^2(x) - \varphi_3^2(x)$

② Posons

$$(*)\quad \begin{cases} x_1' = f_1(x) = x_1 + x_2 \\ x_2' = f_2(x) = \quad x_2 + 2x_3. \\ x_3' = f_3(x) = \quad\quad x_3. \end{cases}$$

x_1', x_2', x_3' sont les composants de x dans la base orthogonale $\{v_i\}$

On a $X = M(x)_{e_i}$ $X' = M(x)_{v_i}$ $X' = P^{-1}X$ où $P = P_{e_i \to v_i}$
$= \|v_1, v_2, v_3\|$.

③ Résolvons $(*)$ par rapport à x_1, x_2, x_3, on obtient un système du type. $X = PX'$, les vecteurs colonnes de la matrice P sont le vecteurs de la base orthogonales.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P = (P^{-1})^{-1}$$

après calculs on trouve $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3. \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Conclusion : $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

A suivre