Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 2017/2018

Rattrapage d'analyse numérique 2

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Quelles sont les conditions suffisantes sur α et β pour que les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent?
2. Ecrire les algorithmes des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
3. Déterminer l'ensembles des valeurs α et β (s'il existe) pour lequel la méthode de Gauss-Seidel converge mais pas celle de Jacobi et vice versa.

Solution

1. Si A à diagonale strictement dominante alors les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent.

Ce qui veut dire si

$$\begin{cases} |\alpha| + |\beta| < 1 \\ |\alpha| < 1 \\ |\beta| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow |\alpha| + |\beta| < 1 .$$

2. **Algorithme de Jacobi**

Données: $A, b, x_0, n\max, tol$
$A = D - L - U$
$B = D^{-1}(L+U)$
$C = D^{-1}b$
$n = 0$
$err = 1$
Tant que err>tol et n<nmax faire
    $x = Bx_0 + c$
    $n = n + 1$
    $err = \|x - x_0\|$
    $x_0 = x$
Si n=nmax
    Ecrire 'la méthode de ne converge pas'
sinon
    Ecrire 'la solution est ' x

Algorithme de Gauss-Seidel

Données: $A, b, x_0, n\max, tol$
$A = D - L - U$
$B = (D-L)^{-1}U$
$C = (D-L)^{-1}b$
$n = 0$
$err = 1$
Tant que err>tol et n<nmax faire
    $x = Bx_0 + c$

$n = n + 1$
$err = \|x - x_0\|$
$x_0 = x$

Si n=nmax

Ecrire 'la méthode de ne converge pas'

sinon

Ecrire 'la solution est ' x

3.
$B_J = (L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ +\alpha & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \det(B_j - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\beta \\ +\alpha & -\lambda & 0 \\ -\beta & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\alpha^2\lambda + \beta^2\lambda - \lambda^3 = -\lambda\left(\alpha^2 - \beta^2 + \lambda^2\right)$

Les valeurs propres de B_J sont $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ et $\lambda_3 = -\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ si $\beta^2 - \alpha^2 > 0$ et $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ et $\lambda_3 = -i\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$ si $\beta^2 - \alpha^2 < 0$

donc le rayon spectral de B_J est $\rho(B_J) = \sqrt{\left|\beta^2 - \alpha^2\right|}$

$B_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ +\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ 0 & \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det(B_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha & -\beta \\ 0 & -\alpha^2 - \lambda & -\alpha\beta \\ 0 & \alpha\beta & \beta^2 - \lambda \end{vmatrix} = -\alpha^2\lambda^2 + \beta^2\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^2\left(\lambda + \alpha^2 - \beta^2\right).$

Les valeurs propres de B_{GS} sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = \beta^2 - \alpha^2$ donc le rayon spectral de B_{GS} est $\rho(B_{GS}) = \left|\beta^2 - \alpha^2\right|$

La méthode de Gauss-Seidel converge mais pas celle de Jacobi si et seulement si $\rho(B_{GS}) < 1$ et $\rho(B_J) > 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left|\beta^2 - \alpha^2\right|} > 1 \\ \left|\beta^2 - \alpha^2\right| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\beta^2 - \alpha^2\right| > 1 \\ \left|\beta^2 - \alpha^2\right| < 1 \end{cases},$

On voit bien que l'ensemble cherché est vide c'est à dire que les méthodes convergent simultanément et divergent simultanément.

Exercice 2

1. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer $cond_2(A)$. Conclure

2. Calculer $\|A\|_\infty$ et $\|A\|_1$ pour la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 300 & -50 \\ -30 & 20 & -70 \\ -100 & 50 & 10 \end{pmatrix}$$

3. Soit A une matrice inversible. Montrer que si $\|\delta A\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ alors $\dfrac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} < 1$, où δA est l'erreur sur A, x solution du système linéaire $Ax = b$ et δx est l'erreur sur x.

Solution
1. Remarquons d'abord que la matrice A est symétrique définie positive en effet $7 > 0$ et $\det(A) = 20 > 0$.
alors $cond_{2.}(A) = \dfrac{\max \lambda_i}{\min \lambda_i} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$
2. $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}| = 450$
$\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}| = 370$
3. $(A+\delta A)(x+\delta x) = b \Leftrightarrow Ax + A\delta x + \delta A\,(x+\delta x) = b \Leftrightarrow A\delta x = -\delta A\,(x+\delta x) \Leftrightarrow \delta x = -A^{-1}\delta A\,(x+\delta x)$
$\Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|x+\delta x\| \Rightarrow \dfrac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1.$

Exercice 3
I. On considère le problème

$$(P)\begin{cases} y' = -2y + te^{3t}, & 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Utiliser la méthode d'Euler pour approcher la solution de (P) avec un pas $h = 0.5$.
2. Déterminer la solution du problème .
3. Donner une borne de l'erreur pour les approximations obtenues en 1.

On donne: $e^3 \approx 20 \qquad e^{-2} \approx 0.1$.

II. On considère le problème

$$(E) \qquad \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t > 0 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

Pour approcher le problème (E),on pose $h > 0$, $t_i = ih$ et on considère le schéma numérique suivant:

$$\begin{array}{lrcl} (S) & y_{i+1} & = & y_i + \dfrac{h}{2}\left(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})\right), \qquad i = 0, 1, \ldots \\ \text{et} & y_0 & = & \alpha \end{array}$$

Trouver la condition de stabilité sur h lorsque le schéma (S) est appliqué au problème test

$$\begin{cases} y' = -\lambda y \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

avec $\lambda > 0$.

Solution
I.
1. On pose $f(t, y) = -2y + te^{3t}$
La méthode d'Euler s'écrit:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad n \geq 0$$

$y(0) = y_0 = 0$
$y(0.5) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 0$
$y(1) \approx y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 0.5f\,(0.5, 0) = 0.5 \times 0.5 \times e^{3/2} = 0.25e^{3/2}$
2. L'équation $y'(t) = -2y$ admet comme solution $y(t) = Ke^{-2t}$

La méthode de variation de la constante:
On pose $y'(t) = K'(t)e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t}$,
en remplaçant dans l'équation du problème on obtient:
$K'(t) = te^{5t}$ ce qui implique $K(t) = \left(t - \frac{1}{5}\right)e^{5t} + c$ et la solution de l'équation est :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right)e^{3t} + ce^{-2t}$$

La condition initiale implique $c = \frac{1}{25}$ et donc la solution du problème est :

$$y(t) = \left(\frac{1}{5}t - \frac{1}{25}\right)e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$$

3. La fonction $f(t, y)$ est lipschitzienne par rapport à y uniformemment par rapport à t avec une constante de Lipschitz $L = 2$.
La borne de l'erreur de la méthode d'Euler est donnée par la formule

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{Mh}{2L}\left(e^{L(t_i - t_0)} - 1\right)$$

où $M = \max\limits_{t\in[0,1]} y''(t)$
$y'(t) = \left(\frac{3}{5}t + \frac{2}{25}\right)e^{3t} - \frac{2}{25}e^{-2t} \Rightarrow y''(t) = \left(\frac{9}{5}t + \frac{21}{25}\right)e^{3t} + \frac{4}{25}e^{-2t} \Rightarrow y'''(t) = \left(\frac{18}{5}t + \frac{108}{25}\right)e^{3t} - \frac{8}{25}e^{-2t}$ on voit bien que
$\forall x \in [0, 1]$ $y'''(t) > 0$ donc la fonction $y''(t)$ est positive et strictement croissante et $M = y''(1) = \left(\frac{66}{25}\right)e^3 + \frac{4}{25}e^{-2}$
Au point $t_1 = 0.5$ $\quad |y(t_1) - y_1| \leq \frac{M}{8}\left(e^{2(t_1 - t_0)} - 1\right) = \frac{52.8}{8}(e - 1)$
Au point $t_2 = 1$ $\quad |y(t_2) - y_2| \leq \frac{M}{8}\left(e^{2(t_2 - t_0)} - 1\right) = \frac{52.8}{8}(e^2 - 1)$
II.
En remplaçant la fonction du problème test dans le schéma (S) on a
$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(-\lambda y_i - \lambda y_{i+1}) \Leftrightarrow (2 + \lambda h)y_{i+1} = (2 - \lambda h)\, y_i \Leftrightarrow y_{i+1} = \dfrac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h} y_i$
$\Leftrightarrow y_i = \alpha \left(\dfrac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h}\right)^i$, le schéma est stable si et seulement si

$$\left|\frac{2 - \lambda h}{2 + \lambda h}\right| < 1$$

comme $\lambda h > 0$ alors on considère la fonction $g(x) = \dfrac{2 - x}{2 + x}$, $x > 0$ alors $g(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$
de plus $g'(x) = \dfrac{-4}{(2 + x)^2} < 0$ donc la fonction $g(x)$ est strictement décroissante et$\forall x > 0$ $|g(x)| < 1$.
En conclusion $\quad \forall h > 0$ le schéma (S) est stable.