Université Abou Bakr Belkaid
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques 2017/2018

Examen final d'analyse numérique 2
Corrigé

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$

1. Effectuer 2 itérations par la méthode de la puissance, à partir de $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Conclure.

2. Expliquer comment fonctionne la méthode de la puissance et donner deux explications possibles de ce qui se passe en 1. Selon vous, quelle est l'explication la plus probable?

Solution

1. On pose $x^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Première itération

$y^{(1)} = Ax^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\|y^{(1)}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\|_2 = \frac{13}{2\sqrt{2}}$

$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{\|y^{(1)}\|_2} = \frac{2}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\lambda^{(1)} =< Ax^{(1)}, x^{(1)} >$

Comme $Ax^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

alors $\lambda^{(1)} =< \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \frac{2}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} >= \frac{2}{13} < \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} >= \frac{7}{13}$

Deuxième itération

$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\|y^{(2)}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\left\|\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}\right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}(7\sqrt{2})$

$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{\|y^{(2)}\|_2} = \frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x^{(0)}$

$\lambda^{(2)} =< Ax^{(2)}, x^{(2)} >=< y^{(1)}, x^{(0)} >= \frac{1}{2} < \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \frac{1}{4}$

La suite engendrée par la méthode de la puissance est $x^{(n)} = \begin{cases} x^{(0)} & \text{si } n \text{ est pair} \\ x^{(1)} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

De plus les approximations $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ n'appartiennent pas aux disques de Gershgorin $\{|z-2| \leq 0.5\} \cup \{|z+2| \leq 0.5\}$. La méthode ne converge pas.

2. On suppose que les valeurs prores de A sont tels que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ et que les vecteurs propres associés v_i forment une base alors

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \Rightarrow Ax^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i v_i \Rightarrow x^{(k)} = A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k c_1 v_1 + \lambda_1^k \sum_{i=2}^{n} c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k v_i$$

Or $\left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$ quand $k \to \infty$ donc $x^{(k)} \to \lambda_1^k c_1 v_1$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre dominante λ_1.

la valeur propre $\lambda_1 \approx \dfrac{< x^{(k)}, Ax^{(k)} >}{\|x^{(k)}\|_2^2}$.

Une première raison pour que la méthode ne converge pas est $c_1 = 0$.

Une deuxième raison est qu'ils existent deux valeurs propres de même module.

Au vu des disques de Gershgorin correspondants à notre matrice la deuxième explication est la plus plausible, étant donné qu'une première valeur propre est proche de -2 et que la seconde est proche de 2.

Exercice 2

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ où

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

2. En utilisant les disques de Gershgorin, donner une estimation du nombre maximal de valeurs propres complexes des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -1/2 & 0 & 6 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution

1. Prenons v un vecteur propre associé à la valeur propre λ, et soit i_0 tel que $|v_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$.

Puisque v est vecteur propre pour λ , on a $Av = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda - a_{ii})v_i = \sum_{j \neq i} a_{ij} v_j \qquad 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow |\lambda - a_{ii}|\,|v_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\,|v_j| \qquad 1 \leq i \leq n$

Prenons $i = i_0$ alors $|\lambda - a_{i_0 i_0}|\,|v_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|\,|v_j|$ puisque $|v_{i_0}| \neq 0$ alors $|\lambda - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}|$. (car $\dfrac{|v_j|}{|v_{i_0}|} \leq 1$)

D'où $\lambda \in D_{i_0}$ où $D_{i_0} = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z - a_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \right\}$.

2. Remarquons d'abord que puisque les matrices A et B sont réelles alors si λ est valeur propre complexe $\overline{\lambda}$ est aussi valeur propre.

Pour la matrice A

Les disques par lignes sont

$D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2| \leq 1\}, \qquad D_2 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 4| \leq 2\},$

$D_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 6| \leq 1\}, \qquad D_4 = \{z \in \mathbb{C}, |z - 9| \leq 1\}.$

Le disque D_4 est isolé, il contient une seule valeur propre donc $\lambda_4 \in \mathbb{R}$.

Les disques par colonnes sont

$D_1' = \{z \in \mathbb{C}, |z - 2| \leq 1/2\}, \qquad D_2' = \{z \in \mathbb{C}, |z - 4| \leq 1/2\},$

$D_3' = \{z \in \mathbb{C}, |z-6| \leq 1\}$, $\quad D_4' = \{z \in \mathbb{C}, |z-9| \leq 3\}$.
Les disques D_1' et D_2' sont isolés, ils contiennent une valeur propre chacun donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
En conclusion, la matrice A ne contient aucune valeur propre complexe.

Pour la matrice B

Les disques par lignes sont
$D_1 = \{z \in \mathbb{C}, |z+5| \leq 1\}$, $\quad D_2 = \{z \in \mathbb{C}, |z-2| \leq 1\}$,
$D_3 = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 3/2\}$, $\quad D_4 = \{z \in \mathbb{C}, |z-3| \leq 3/4\}$.
Le disque D_1 est isolé, il contient une seule valeur propre donc $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
Les disques par colonnes sont
$D_1' = \{z \in \mathbb{C}, |z+5| \leq 1/2\}$, $\quad D_2' = \{z \in \mathbb{C}, |z-2| \leq 5/4\}$,
$D_3' = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 3/2\}$, $\quad D_4' = \{z \in \mathbb{C}, |z-3| \leq 1\}$.
Les disques par colonnes n'apportent aucune information supplémentaire.
En conclusion, la matrice B contient au maximum deux valeurs propres complexes.

Exercice 3

On considère le problème

$$(P)\begin{cases} y' = 2ty - 4t, & 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

1. Montrer que (P) admet une solution unique.
2. Déterminer cette solution.
3. Donner une borne de l'erreur dans l'approximation de $y(2)$ utilisant la méthode d'Euler avec $h = \dfrac{1}{25}$.

Solution

1. On pose $f : [0,2] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(t,y) = 2ty - 4t$.

i) f est continue sur $[0,2] \times \mathbb{R}$

ii) $|f(t,y) - f(t,z)| \leq 2t\,|y-z| \leq 4\,|y-z|$,donc f est lipschitzienne par rapport à y uniformement par rapport à t, de constante $L = 4$.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème (P) admet une solution unique.

2. L'équation $y' = 2ty - 4t$ s'écrit $y' = 2t\,(y-2)$ c'est une équation à variables séparables.
$\Rightarrow \int \dfrac{dy}{y-2} = \int 2tdt \Rightarrow y(t) = ce^{t^2} + 2$
La condition initiale donne $c = 1$.
D'où la solution du problème (P) est $\;y(t) = 2 + e^{t^2}$

3. $y'(t) = 2te^{t^2}$ et $y''(t) = (2+4t^2)\,e^{t^2}$qui est toujours positive. Comme $y'''(t) = t\,(12+8t^2)\,e^{t^2}$ est positive alors le maximum de $y''(t)$ sur $[0,2]$ est atteint pour $t = 2$,donc $M = y''(2) = 18e^4$.
D'où $|y(2) - y_{50}| \leq \dfrac{hM}{2L}\left[e^{L(2-0)} - 1\right] = \dfrac{18e^4}{50 \times 4}(e^8 - 1) = 0.09e^4(e^8-1)$.

Exercice 4

On considère le problème

$$(E) \qquad \begin{cases} y' = f(t,y), t \in [a,b] \\ \quad y(a) = y_0 \end{cases}$$

où $[a,b] \subset \mathbb{R}, y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2sur $[a,b] \times \mathbb{R}$ et lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, c'est à dire

$$\exists L > 0 \text{ tel que } \forall t \in [a,b], \forall y,z \in \mathbb{R}, |f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y-z|.$$

Pour approcher le problème (E), on considère le schéma numérique suivant:

$$(S) \qquad y_{n+1} = y_n + \alpha h f(t_n, y_n) + \beta h f(t_n + h, y_n + h f(t_n, y_n)), \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

où α et β sont des réels à choisir au mieux, $h = (b-a)/N$ et $t_n = a + nh, 0 \leq n \leq N$ ($N \in \mathbb{N}$ fixé)

1. Montrer que le schéma (S) est stable pour tout choix de α et β.
2. Déterminer une condition sur α et β pour que le schéma (S) soit consistant.
3. En déduire une condition sur α et β pour que le schéma (S) converge.
4. On suppose que $\alpha + \beta = 1$ et $\beta > 0$. Etudier l'absolue stabilité du schéma (S).

Solution

En posant $\phi(t, y, h) = \alpha f(t, y) + \beta f(t + h, y + h f(t, y))$ le schéma proposé se reécrit:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$$

1. Pour montrer que le schéma (S) est stable pour tout choix de α et β. Il suffit de montrer que la fonction ϕ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable pour tout α et β dans $\mathbb{R}$.

Soit $t \in [a, b]$ et soit $y, z \in \mathbb{R}$

$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| = |\alpha f(t, y) + \beta f(t + h, y + h f(t, y)) - \alpha f(t, z) + \beta f(t + h, z + h f(t, z))|$

$\leq |\alpha| \, |f(t, y) - f(t, z)| + |\beta| \, |f(t + h, y + h f(t, y)) - f(t + h, z + h f(t, z))|$

Puisque f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, on a:

$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq |\alpha| \, L \, |y - z| + |\beta| \, L \, |y + h f(t, y) - z - h f(t, z)|$

$\leq |\alpha| \, L \, |y - z| + |\beta| \, L \, |y - z| + |\beta| \, L \, |h f(t, y) - h f(t, z)|$

$\leq |\alpha| \, L \, |y - z| + |\beta| \, L \, |y - z| + |\beta| \, L^2 h \, |y - z|$, comme $h \leq h^* \leq b - a$, on obtient:

$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \widetilde{L} \, |y - z|$ avec $\widetilde{L} = |\alpha| \, L + |\beta| \, L + |\beta| \, L^2 h^*$

Il s'ensuit que pour tout choix de α et β, ϕ est lipchitzienne par rapport à la deuxième variable et le schéma (S) est stable.

2. Le schéma (S) est consistant, si et seulement si $\phi(t, y, 0) = f(t, y) \qquad \forall t, \forall y.$

Or $\phi(t, y, 0) = \alpha f(t, y) + \beta f(t, y)$ alors, pour que le schéma (S) soit consistant, il faut et il suffit que $\alpha + \beta = 1$.

3. Si $\alpha + \beta = 1$, le schéma (S) est stable et consistant, il est convergent.

4. On pose $f(t, y) = -\lambda y$ avec $\lambda > 0$

alors (S) s'écrit

$y_{n+1} = y_n - \alpha h\lambda y_n - \beta h\lambda y_n + \beta h^2\lambda^2 y_n = \left(1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2\right) y_n$

C'est une suite suite géométrique de raison $1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2$ alors $y_n = \left(1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2\right)^n y_0$

Le schéma est A-stable ssi $\left|1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2\right| < 1$

On pose $x = h\lambda$ et $g(x) = 1 - x + \beta x^2, x > 0$

$g'(x) = -1 + 2\beta x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2\beta} > 0$

$\min g(x) = g(\dfrac{1}{\beta}) = 1 - \dfrac{1}{4\beta}$

$g(x) = 1 \Leftrightarrow 1 - x + \beta x^2 = 1 \Leftrightarrow x\left(-1 + \beta x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{\beta} > 0.$

si $1 - \dfrac{1}{4\beta} \geq -1$

alors $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow 0 < x < \dfrac{1}{\beta}$ et $\left|1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2\right| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < \dfrac{1}{\beta\lambda}.$

si $1 - \dfrac{1}{4\beta} < -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4\beta} > 2 \Leftrightarrow 0 < \beta < \dfrac{1}{8}$

$g(x) = -1 \Leftrightarrow \beta x^2 - x + 2 = 0$
$\Delta = 1 - 8\beta > 0$
$x_1 = \frac{1-\sqrt{1-8\beta}}{2\beta} > 0, x_2 = \frac{1+\sqrt{1-8\beta}}{2\beta}$
alors $|g(x)| < 1 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{1-\sqrt{1-8\beta}}{2\beta}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{1-8\beta}}{2\beta}, \dfrac{1}{\beta}\right[$

et $\left|1 - h\lambda + \beta h^2\lambda^2\right| < 1 \Leftrightarrow \lambda \in \left]0, \frac{1-\sqrt{1-8\beta}}{2\beta h}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{1-8\beta}}{2\beta h}, \dfrac{1}{\beta h}\right[$.
On déduit que pour tout α, β tels que $\alpha + \beta = 1$ et $\beta > 0$ le schéma (S) est absolument instable.